L. Pandolfi

Alcune Nozioni di Geometria

Per studenti dislessici

Questa versione è scritta in carattere bastone e non giustificata a destra in modo da essere più leggibile per chi ha problemi di dislessia.
Una versione in caratteri romani e giustificata ha per titolo *Alcune Nozioni di Geometria* (senza sottotitolo).

L. Pandolfi, in pensione dal Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche "G.L. Lagrange"

Indice

1 Geometria analitica **3**

1.1 Premessa sulle matrici, i determinanti e i sistemi lineari 3

1.1.1 Sistemi lineari di due equazioni in due incognite 3

1.1.2 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite 6

1.1.3 Matrici e loro determinanti 8

1.1.4 Le proprietà delle operazioni tra matrici e dei determinanti . . . 10

1.1.5 Matrice trasposta e aggiunta 12

1.1.6 Sul calcolo dei determinanti 13

1.2 Il metodo delle coordinate nello spazio a tre dimensioni 15

1.2.1 Lo spazio $\mathbb{R}^3$ e lo spazio $\mathbb{C}^3$; spazi vettoriali a tre dimensioni . . 17

Osservazione sulla notazione 18

1.3 Vettori liberi e vettori applicati 19

Direzioni e verso 21

1.3.1 Traslazioni 22

1.3.2 traslazione di un vettore 22

1.3.3 traslazione degli assi coordinati 22

1.4 Distanza tra punti ed equazioni della circonferenza e della sfera 24

1.5 Prodotto scalare ed angoli 27

Le proprietà della norma e del prodotto scalare 29

1.5.1 Coseni direttori in $\mathbb{R}^3$ 32

1.5.2 Proiezione di un vettore nella direzione di un'altro 32

1.6 Prodotto vettoriale e prodotto misto 33

1.6.1 Prodotto vettoriale ed orientazione di $\mathbb{R}^3$ 36

1.6.2 Operazioni tra vettori applicati 36

1.7 Rotazione degli assi e dei vettori 37

1.7.1 Rotazione degli assi coordinati 37

Matrici ortogonali 2×2 e rotazioni del piano 39

Rotazione di un vettore in un fissato sistema di riferimento 40

1.7.2 Rotazioni applicate successivamente 41

1.7.3 Rotazione di coordinate e prodotto scalare e vettoriale 42

1.8 Coordinate curvilinee 43

Coordinate polari nel piano 43

Coordinate cilindriche nello spazio 44
Coordinate sferiche nello spazio 45
Coordinate ellittiche nel piano 45
1.9 Rette per l'origine 45
Direzione e verso su una retta 47
1.10 Piani per l'origine 47
1.10.1 Equazione cartesiana del piano per l'origine 49
1.11 Rette e piani generici 51
1.11.1 Casi particolari dell'equazione del piano 52
1.11.2 La retta come intersezione di piani 54
1.11.3 Retta per due punti e piano per tre punti 55
1.11.4 Rette parallele, complanari e sghembe 56
1.11.5 Alcuni problemi relativi al calcolo di elementi geometrici 57
Divisione di un segmento in parti proporzionali 57
I piani ortogonali ad una data retta r 58
Le rette ortogonali ad un piano 58
Piano per una retta e parallelo ad un vettore 59
Retta assegnata con l'equazione parametrica 59
Retta assegnata come intersezione di piani 59
La retta che interseca ortogonalmente due rette sghembe 59
L'insieme dei piani che *non* intersecano una retta 60
1.12 La geometria analitica piana 61
1.13 Calcolo di proiezioni, distanze ed angoli 62
Scomposizione di un vettore 62
Proiezione ortogonale di un punto su una retta 62
Proiezione ortogonale di un punto su un piano 63
Il caso del piano rappresentato parametricamente . . 63
Il caso del piano in forma cartesiana 64
Distanza tra due piani paralleli 65
Distanza tra una retta e un piano ad essa parallelo . . . 65
Distanza tra due rette parallele o sghembe 66
Distanza tra rette parallele 66
Distanza tra due rette sghembe 66
Angoli tra rette e tra rette e piani 67
1.14 Circonferenze nello spazio 67
1.15 Superfici e curve generiche 69
1.15.1 Tangenti e piani tangenti 71
1.15.2 Cilindri 76
1.15.3 Coni 77
1.15.4 Superfici rigate 78
1.15.5 Superfici di rotazione 78
1.15.6 Sezioni coniche 80

1.16 Ellissoidi ed iperboloidi in forma canonica . . . 83
1.16.1 L'ellissoide . . . 84
1.16.2 Gli iperboloidi . . . 85
L'iperboloide a due falde . . . 85
Cono asintotico . . . 86
L'iperboloide ad una falda . . . 87
1.17 Paraboloidi in forma canonica . . . 90
Il paraboloide ellittico . . . 91
Il paraboloide iperbolico . . . 92

2 Matrici e vettori: cenni di algebra lineare 95
2.1 Spazi e sottospazi . . . 95
2.2 Indipendenza e dipendenza lineare . . . 97
2.2.1 Basi ordinate e orientazione dello spazio . . . 102
2.3 Trasformazioni lineari . . . 103
2.3.1 Rappresentazioni di trasformazioni lineari . . . 108
2.4 Cambiamenti di coordinate . . . 112
2.5 Matrici invertibili: costruzione della matrice inversa . . . 114
2.6 Endomorfismi, autovalori ed autovettori . . . 120
2.6.1 La complessificazione di trasformazioni lineari tra spazi reali . . 123
2.7 I funzionali . . . 128
2.8 Prodotto scalare e norma . . . 129
Una formula matriciale per il calcolo del prodotto scalare . . . 132
2.8.1 Basi ortognormali di sottospazi e il teorema delle proiezioni . . . 133
2.8.2 Prodotto scalare e trasformazione aggiunta . . . 138
Complessificato, prodotto interno ed aggiunto . . . 140
2.8.3 Rappresentazione matriciale della trasformazione aggiunta . . . 141
2.8.4 Rappresentazioni matriciali di endomorfismi unitari ed ortogonali 143
2.9 Sistemi di equazioni lineari . . . 144
2.9.1 Il metodo di riduzione di Gauss . . . 146
Alternativa di Fredholm . . . 147
2.10 Endomorfismi ortogonali e isometrie . . . 150
2.10.1 Le proprietà spettrali delle trasformazioni ortogonali . . . 153
2.10.2 L'asse di simmetria delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ . . . 156
2.11 Diagonalizzazione delle matrici simmetriche . . . 156
2.12 Coniche e quadriche . . . 159
2.12.1 Le quadriche in posizione generale . . . 160
2.12.2 Come identificare i casi delle coniche e quadriche degeneri . . . 166
Il caso parabolico . . . 169
Il caso ellittico e iperbolico . . . 170
Ricapitolando: . . . 170
2.13 Massimi e minimi di funzioni di due variabili . . . 171

Capitolo 1

Geometria analitica

1.1 Premessa sulle matrici, i determinanti e i sistemi lineari

In questa parte introduciamo alcune notazioni che, nella parte relativa alla geometria analitica, interesseranno soltanto in casi particolari. Tanto vale però introdurre subito alcune notazioni generali, che verranno riprese nel capitolo 2

1.1.1 Sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Le considerazioni che ora esponiamo dovrebbero essere note. Consideriamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Questo sistema si dice LINEARE OMOGENEO perché il termine noto è nullo. Chiaramente, una soluzione è $x = 0$, $y = 0$.

Se tutti i COEFFICIENTI a, a', b, b' sono nulli, allora ogni coppia di numeri x ed y lo risolve. Studiamo il caso in cui *almeno un coefficiente è non nullo.* Se esso è per esempio a allora

$$x = -\frac{b}{a}y\,.$$

Sostituendo nella seconda equazione si trova che y deve verificare

$$0 = \left(-a'\frac{b}{a} + b'\right)y = \frac{1}{a}\left(ab' - a'b\right)y\,.$$

Si hanno dunque tre casi:

- Se $ab' - a'b \neq 0$ allora $y = 0$ e quindi anche $x = 0$: il sistema ammette l'unica soluzione $x = 0$, $y = 0$;

- se invece $ab' - a'b = 0$ allora y può scegliersi qualsiasi e quindi il sistema ammette le infinite soluzioni che si ottengono assegnando ad y un valore qualsiasi e scegliendo
$$x = -\frac{b}{a}y\,;$$
il sistema ha infinite soluzioni, che dipendono da un *unico* parametro (il numero y).

- se tutti i coefficienti sono nulli allora ogni coppia (x, y) è soluzione; ossia l'insieme delle soluzioni dipende da *due* parametri.

Queste considerazioni mostrano un ruolo particolare per la differenza $(ab' - a'b)$ e suggeriscono l'introduzione della tabella di numeri

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

che si chiama MATRICE con due righe e due colonne (o anche una matrice 2×2). I numeri che compaiono nella matrice si chiamano gli ELEMENTI della matrice e il numero $ab' - ba'$ si chiama il DETERMINANTE della matrice. Usa indicarlo con uno dei simboli

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Si noti che

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & b' \\ a & a' \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Si è detto che quando il determinante (1.2) è nullo, $ab' - a'b = 0$, allora il sistema (1.1) ammette infinite soluzioni non nulle. Consideriamo il caso $a \neq 0$. Scegliendo $y = 1$ si trova un certo valore per x, $x = -\frac{b}{a}$. Con $\lambda = \frac{b}{a}$ si trova

$$b = \lambda a\,, \qquad b' = \lambda a' \ :$$

se il determinante è nullo allora le colonne della matrice sono proporzionali. D'altra parte, si è visto in (1.3) che il determinante non cambia scambiando il ruolo delle righe con quello delle colonne. Dunque, *se il determinante è nullo anche le righe sono proporzionali.* Si è quindi provato:

Teorema 1 *Se il determinante di una matrice 2×2 è nullo, le righe della matrice sono una multipla dell'altra; e le colonne della matrice sono una multipla dell'altra.*

Consideriamo ora il SISTEMA LINEARE AFFINE ossia con termine noto non nullo,

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c'\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Se i coefficienti a, b, a', b' sono nulli il sistema può risolversi solo se $c = 0$ e $c' = 0$ e in tal caso ogni coppia (x, y) lo risolve. Sia non nullo uno di quei coefficienti, per esempio a. Allora,

$$x = \frac{c - by}{a}$$

e, sostituendo nella seconda equazione,

$$\frac{1}{a}[ab' - ba']y = \frac{1}{a}[ac' - a'c] \qquad \text{ossia} \qquad (ab' - ba')y = (ac' - ca')\,.$$

Si vede da qui:

- Se il determinante $[ab' - ba']$ *non è zero,* allora *la soluzione è unica.* La soluzione è

$$x = \frac{b'}{ab' - ba'}c - \frac{b}{ab' - ba'}c'\,, \qquad y = -\frac{a'}{ab' - ba'}c + \frac{a}{ab' - ba'}c'\,. \tag{1.5}$$

- se $[ab' - ba'] = 0$ allora la soluzione può esistere o meno:
  - se
  $$ac' - ca' \neq 0$$
  soluzioni non esistono;
  - se uno degli elementi della matrice è non nullo e
  $$ac' - ca' = 0$$
  allora ci sono infinite soluzioni dipendenti da *un solo* parametro libero.

Si vede da (1.5):

Teorema 2 *Se la soluzione è unica (ossia se $ab' - a'b \neq 0$) esistono numeri r, s, r', s' tali che*

$$x = rc + r'c'\,, \qquad y = sc + s'c'\,.$$

Consideriamo ora la matrice con 3 righe e 2 colonne (come si dice, una matrice 3×2)

$$A = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}\,. \tag{1.6}$$

Questa matrice ha sei ELEMENTI e da questa si possono estrarre le tre matrici 2×2

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}\,, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a & a' \\ c & c' \end{bmatrix}\,, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b & b' \\ c & c' \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Vale:

Teorema 3 *Supponiamo che le due colonne della matrice A in (1.6)* non *siano proporzionali. Allora, almeno una delle matrici A_i ha determinante non nullo.*

Dim. Se le righe non sono proporzionali allora la matrice ha un elemento non nullo. Per fissare le idee, sia $a \neq 0$.

Ora procediamo per assurdo. Se i tre determinanti sono nulli si ha

$$ab' = a'b\,, \qquad ac' = a'c\,, \qquad bc' = b'c\,.$$

Sia $\lambda = a'/a$. Allora:

$$a = \lambda a'\,, \qquad b' = \lambda b\,, \qquad c' = \lambda c\,. \quad \blacksquare$$

In modo analogo si prova:

Teorema 4 *Supponiamo che* non *siano proporzionali le due righe della matrice*

$$A' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

Allora, almeno una delle matrici seguenti ha determinante non nullo.

$$A'_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}, \qquad A'_2 = \begin{bmatrix} a & c \\ a' & c' \end{bmatrix}, \qquad A'_3 = \begin{bmatrix} b & c \\ b' & c' \end{bmatrix}.$$

1.1.2 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Si è visto che lo studio dei sistemi lineari in due equazioni e due incognite conduce a vari casi. Facilmente si capisce che aumentando il numero delle equazioni e delle incognite i casi si moltiplichino; e già nel caso di tre equazioni si trovano numerosi casi particolari. D'altra parte i sistemi lineari sono strumenti essenziali per esempio del calcolo numerico. Dovremo quindi trovare un modo semplice per descrivere cosa accade addirittura per sistemi di un qualsiasi numero di equazioni, in un qualsiasi numero d'incognite (anche tra loro diversi). A ciò è dedicato il paragafo 2.9. Per ora consideriamo solamente il caso dei SISTEMI LINEARI OMOGENEI di tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

Questo sistema ammette sempre la soluzione nulla, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Conviene associare a questo sistema la MATRICE 3×3 ossia con tre righe e tre colonne

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}.$$

A questa matrice associamo il DETERMINANTE che si definisce, a partire dai determinanti di matrici 2×2, in questo modo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} .$$

Questa strana definizione è suggerita dallo studio dei sistemi lineari. Per ora limitiamoci a provare:

Teorema 5 *Se il determinante è nullo allora esistono soluzioni x, y e z, non nulle, del sistema (1.8).*

Dim. Se una delle tre colonne, per esempio la prima, è nulla l'asserto segue scegliendo $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. Se due colonne sono proporzionali, per esempio se sono proporzionali le prime due, esistono x ed y non ambedue nulli tali che

$$ax + by = 0\,, \qquad a'x + b'y = 0\,, \qquad a''x + b''y = 0\,.$$

L'asserto segue con $z = 0$. Supponiamo allora che le prime due colonne non siano proporzionali. Dal teorema 3, uno almeno dei determinanti seguenti è non nullo:

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.$$

Sia per esempio $d_1 \neq 0$. In questo caso scegliamo $z = 1$. Esistono x_0 ed y_0, non ambedue nulli, che risolvono

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 & = & -c \\ a'x_0 + b'y_0 & = & -c'\,. \end{cases}$$

Mostriamo che, nelle ipotesi del teorema, questi stessi numeri verificano

$$a''x_0 + b''y_0 = -c''$$

così che il sistema è risolto da x_0, y_0, 1.

Si calcola immediatamente che valgono le uguaglianze seguenti:

$$0 = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c - (ax_0 + by_0) \\ a' & b' & c' - (a'x_0 + b'y_0) \\ a'' & b'' & c'' - (a''x_0 + b''y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & c'' - (a''x_0 + b''y_0) \end{bmatrix} = [ab' - ba'] \cdot [c'' - (a''x_0 + b''y_0)]\,.$$

L'asserto segue ricordando che stiamo lavorando nel caso $[ab' - ba'] \neq 0$. ∎

In particolare:

Teorema 6 *Supponiamo che*

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = 0$$

e che le prime due colonne non *siano proporzionali. In tal caso esistono numeri* t *e* τ *per cui*

$$c = ta + \tau b\,, \quad c' = ta' + \tau b'\,, \qquad c'' = ta'' + \tau b''\,.$$

Dim. Infatti, nessuna soluzione di (1.8) ha $z = 0$. Altrimenti, se per una soluzione fosse $z = 0$, le prime due colonne sarebbero tra loro proporzionali. Dunque, una soluzione ha forma $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 \neq 0$. Si scelga

$$t = \frac{x_0}{z_0}\,, \qquad \tau = \frac{y_0}{z_0}\,. \quad \blacksquare$$

1.1.3 Matrici e loro determinanti

Così come si sono introdotte le matrici 2×2, 3×2 e 3×3, si possono introdurre le matrici $n \times m$, ad n righe ed m colonne,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha mn ELEMENTI.

Sottolineiamo: dicendo che A *è una matrice* $n \times m$ *si intende dire che* n *è il numero delle* righe *mentre* m *è il numero delle* colonne. Dunque n cresce spostandoci dall'alto verso il basso ed m cresce spostandoci da destra a sinistra.

Le matrici $n \times n$, ossia con lo stesso numero di righe e colonne, si dicono MATRICI QUADRATE.

Tra le matrici, si effettuano le operazioni seguenti:

1. PRODOTTO PER UN NUMERO. Si fa moltiplicando tutti gli elementi della matrice per il numero:

$$tA = \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1m} \\ ta_{21} & ta_{22} & \dots & ta_{2m} \\ \vdots & & & \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \dots & ta_{nm} \end{bmatrix}.$$

2. SOMMA di matrici: si può fare quando le matrici hanno lo stesso numero di righe e di colonne, e si fa sommando gli elementi corrispondenti:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. PRODOTTO RIGHE PER COLONNE di due matrici A e B: si fa quando il *numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B*. Il prodotto righe per colonne è definito come segue:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

con

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$$

ossia, c_{ij} si ottiene sommando i prodotti degli elementi corrispondenti sulla i–ma riga di A e sulla j–ma colonna di B.

Sottolineiamo che il prodotto può farsi tra matrice la prima di m colonne e la seconda con lo stesso numero m di righe. Invece, i numeri n e k non sono correlati.

4. DETERMINANTE. Si definisce soltanto nel caso delle MATRICI QUADRATE ossia delle matrici che hanno lo stesso numero di righe e di colonne: $n = m$. Si definisce in modo iterativo come segue. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Il suo determinante, che si indica con uno dei simboli

$$\det A\,, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

si definisce in questo modo: si fissa l'attenzione sugli elementi di una riga, diciamo della riga s. All'elemento a_{sj} si associa il numero d_{sj} che è il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ che si ottiene da A cancellando la riga e la colonna che contengono a_{sj}, ossia la riga s e la colonna j. Per definizione,

$$\begin{aligned}\det A = a_{s1}[(-1)^{s+1}d_{s1}] + a_{s2}[(-1)^{s+2}d_{s2}] + a_{s3}[(-1)^{s+3}d_{s3}] \\ + \cdots + a_{sj}[(-1)^{s+j}d_{sj}] + \cdots + a_{sn}[(-1)^{s+n}d_{sn}]\,.\end{aligned}$$

Il calcolo del determinante di una matrice $n\times n$ è così ricondotto al calcolo di quello di una matrice $(n-1)\times(n-1)$. Iterando il procedimento si arriva al calcolo del determinante di matrici 2×2, che si è già definito (si noti che il determinante di matrici 3×3 è stato definito mediante questa regola).

Si può provare che *il valore trovato non dipende dalla riga prescelta e che al medesimo valore si giunge lavorando, in modo analogo, sugli elementi di una colonna* (e quindi per svolgere un calcolo concreto conviene privilegiare la riga o la colonna che ha il massimo numero di elementi nulli).

1.1.4 Le proprietà delle operazioni tra matrici e dei determinanti

E' immediato verificare che valgono le usuali regole di calcolo per la somma (associatività, e commutatività) e che il prodotto è associativo e si distribuisce sulla somma.

Se le matrici A e B sono matrici rispettivamente con $n\times m$ ed $m\times n$ allora si possono calcolare i due prodotti AB e BA ma in generale $AB\neq BA$ anche se le matrici sono quadrate. Ossia, *il prodotto righe per colonne non è commutativo.* Si verifichi ciò calcolando i prodotti delle due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice i cui elementi sono tutti nulli, che si indica con 0, verifica

$$A + 0 = 0 + A = A$$

per ogni matrice A. Questa matrice si chiama la MATRICE NULLA..

Nel caso di matrici quadrate $n\times n$, si indica con I la matrice i cui elementi sono tutti nulli, salvo quelli sulla DIAGONALE PRINCIPALE, ossia gli elementi a_{ii}. Si richiede che questi elementi valgano 1. E' immediato verificare che

$$AI = IA = A$$

per ogni matrice $n\times n$ e inoltre che

$$tA = (tI)A\,.$$

La matrice I si chiama la MATRICE IDENTITÀ..

Si noti che parlando di matrici nulle oppure identità, le dimensioni delle matrici sono sottintese.

Enunciamo ora, senza dimostrazione, le proprietà dei determinanti.

1. Scambiando tra loro due righe il determinante cambia segno;

2. scambiando tra loro due colonne il determinante cambia segno;

3. una matrice con una riga oppure una colonna nulla ha determinante nullo;

4. aggiungendo ad una riga i multipli degli elementi di un'altra riga, il determinante non cambia. E quindi se due righe sono proporzionali il determinante è nullo;

5. aggiungendo ad una colonna i multipli degli elementi di un'altra colonna, il determinante non cambia. E quindi se due colonne sono proporzionali il determinante è nullo;

6. se un determinante è nullo allora il sistema lineare corrispondente ha infinite soluzioni.

Vale inoltre,

Teorema 7 (DI BINET) *Il determinante di un prodotto di matrici quadrate è il prodotto dei determinanti.*

Sia ora A una matrice quadrata $n \times n$. In certi casi esiste una matrice quadrata B, anch'essa $n \times n$, tale che

$$AB = BA = I\,.$$

Si può provare che la matrice B è unica. Essa si chiama MATRICE INVERSA della matrice A e si indica col simbolo A^{-1}.

Il teorema di Binet dice immediatamente che

$$1 = \det I = (\det A)(\det B)$$

e quindi

Teorema 8 *Se la matrice A ammette inversa allora*

$$\det A \neq 0\,, \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,.$$

1.1.5 Matrice trasposta e aggiunta

Sia A una matrice, $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \tag{1.9}$$

Si chiama MATRICE TRASPOSTA di A, in simboli A^T, la matrice $m \times n$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne, come segue:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} .$$

Se gli elementi della matrice sono numeri complessi allora oltre alla matrice trasposta si introduce anche la MATRICE AGGIUNTA che si indica col simbolo A^*:

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{1m} & \bar{a}_{2m} & \dots & \bar{a}_{nm} \end{bmatrix} .$$

Va detto che mentre il simbolo A^* è pressoché universalmente usato per indicare la matrice aggiunta, la matrice trasposta si indica in vari modi. Per esempio A' oppure ${}^T\!A$.

E' immediato verificare che valgono le regole seguenti che enunciamo per la matrice trasposta ma che valgono anche per l'aggiunta.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = (A^T)(B^T)$;
3. $I^T = I$ e quindi, se A è quadrata, $AB = I$ se e solo se $(B^T)(A^T) = I$. In particolare,
$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \ :$$
se A è invertibile anche A^T lo è e inoltre
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T .$$

Inoltre:

4. se A è quadrata, $\det A^T = \det A$ mentre $\det A^* = \overline{\det A}$.

Sono particolarmente importanti per le applicazioni quelle matrici per cui

$$A = A^T \,. \tag{1.10}$$

Ciò avviene se e solo se la matrice è quadrata e inoltre $a_{ij} = a_{ji}$. Per questa ragione le matrici per cui vale (1.10) si dicono MATRICI SIMMETRICHE. Se gli elementi della matrice sono numeri complessi e se $A = A^*$ allora la matrice si chiama AUTOAGGIUNTA.

Altre matrici importanti sono le ANTISIMMETRICHE, ossia quelle per cui

$$A^* = -A$$

e le ORTOGONALI. Sono queste ultime le matrici per cui

$$A^T = A^{-1} \,.$$

Osservazione 9 si noti che se gli elementi della matrice sono reali i due concetti di matrice simmetrica ed aggiunta vengono a coincidere. ∎

1.1.6 Sul calcolo dei determinanti

Spesso il calcolo dei determinanti si fa ricorrendo direttamente alla definizione. Talvolta conviene procedere in un modo diverso, che illustriamo su un esempio. Si voglia calcolare il determinante

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Scambiando le prime due colonne ci si riconduce a calcolare il determinante della matrice

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(il determinante richiesto è l'opposto di quest'ultimo).

Il determinante non cambia sottraendo dalla seconda riga la prima moltiplicata per 4. Si trova:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8-8 & 5-0 & 6-12 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} .$$

Il determinante non cambia sottraendo dalla terza riga la prima moltiplicata per 2. Si trova:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4-4 & 3-0 & 3-6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} .$$

Il determinante non cambia sottraendo alla terza riga la seconda moltiplicata per $-3/5$. Si trova:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3-5\frac{3}{5} & -3+6\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima matrice è in FORMA TRIANGOLARE. Si verifica facilmente che *il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi della diagonale.* In quest'esempio il determinante dell'ultima matrice è

$$2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 6$$

e quindi la matrice inizialmente data ha determinante -6.

Naturalmente questo metodo può usarsi per il calcolo del determinante di ogni matrice quadrata (ed è particolarmente comodo quando la matrice è $n \times n$ con n grande).

Nel caso particolare delle matrici 3×3 il determinante può calcolarsi anche come segue: Si scrive la matrice rettangolare che si ottiene ripetendo a destra delle tre colonne della matrice prima la prima colonna e poi la seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ a' & b' & c' & a' & b' \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' \end{bmatrix}.$$

Si fanno i prodotti degli elementi sulla diagonali orientate da sinistra in alto verso destra in basso, e si sommano:

$$(ab'c'') + (bc'a'') + (ca'b'').$$

Si fa lo stesso con gli elementi delle diagonali da destra in alto verso sinistra in basso:

$$(cb'a'') + (ac'b'') + (ba'c'').$$

Si sottrae questo dal primo numero trovato:

$$[(ab'c'') + (bc'a'') + (ca'b'')] - [(cb'a'') + (ac'b'') + (ba'c'')].$$

E' immediato verificare che il numero così trovato è il determinante della matrice.

Questa regola per il calcolo del determinante di matrici 3×3 va sotto il nome di REGOLA DI SARRUS.

1.2 Il metodo delle coordinate nello spazio a tre dimensioni

Il metodo delle coordinate è certamente noto. Lo descriviamo con riferimento allo spazio, lasciando al lettore le considerazioni analoghe per il piano.

Si sa che ogni punto dello spazio a tre dimensioni può rappresentarsi in modo "analitico" come segue: si fissa prima di tutto un segmento che useremo come UNITÀ DI MISURA; si fissa quindi un SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO; ossia si fissano tre rette tra loro *incidenti* in un punto O (L'ORIGINE) *e non complanari.* L'origine divide ciascuna retta in due parti. Se ne sceglie una e si chiama la *semiretta positiva.* L'altra semiretta è la *semiretta negativa.*

Queste tre rette si chiamano gli ASSI COORDINATI. Si assegna un ordine a queste tre rette: la prima retta si chiama L'ASSE DELLE ASCISSE o ASSE x; la seconda si chiama L'ASSE DELLE ORDINATE o ASSE y e la terza si chiama ASSE DELLE QUOTE o ASSE z.

Il piano individuato dagli assi x ed y si chiama PIANO xy e analoga notazione per gli altri piani. Questi tre piani si chiamano i PIANI COORDINATI

I punti su ciascuna delle tre rette si individuano mediante la distanza da O se sono sulla semiretta positiva, la distanza cambiata di segno, e quindi con l'opposto della distanza, se sono sulla semiretta negativa.

Ovviamente, le distanze si misurano con riferimento alla prefissata unità di misura[1].

Da un punto P generico dello spazio si fanno passare tre piani, paralleli ai tre piani coordinati. Quindi per esempio il piano parallelo al piano xy non interseca né l'asse x né l'asse y. Interseca però l'asse z perché gli assi coordinati non sono complanari. Analogamente per gli altri due piani. Dunque, il punto P identifica una *terna ordinata* di punti (P_x, P_y, P_z) uno su ciascuno dei tre assi.

Il punto P_x si chiama la PROIEZIONE di P sull'asse x, parallelamente al piano zy, e analogo termine si usa per gli altri due punti.

Viceversa, ciascuna terna ordinata di punti, il punto P_x sull'asse x, il punto P_y sull'asse y ed il punto P_z sull'asse z individua un punto dello spazio, quello che ha tali punti per proiezione.

Osservazione 10 Si noti che la costruzione precedente *non ha senso* se non si è stabilito quale è il primo, il secondo e il terzo asse e anche la semiretta positiva. ∎

Si è già notato che P_x è identificato da un numero x_0, P_y da y_0 e P_z da z_0.

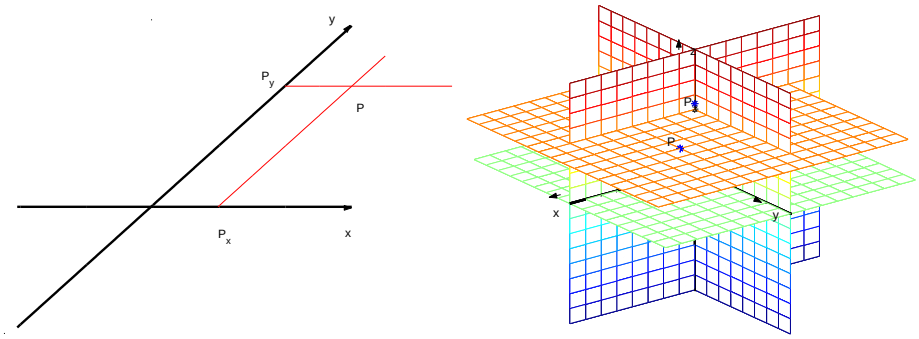
I tre numeri x_0, y_0, z_0 si dicono le COORDINATE del punto P, rispettivamente l'ASCISSA, L'ORDINATA e la QUOTA di P.

Dunque P è identificato dalla *terna ordinata di numeri* (x_0, y_0, z_0) e viceversa ogni terna ordinata di numeri individua un punto dello spazio.

Per indicare il punto P individuato da (x_0, y_0, z_0) scriveremo $P(x_0, y_0, z_0)$.

[1] talvolta si usano unità di misura diverse sui tre assi.

Figura 1.1: sinistra: coordinate cartesiane oblique nel piano. Destra: coordinate cartesiane ortogonali nello spazio (la determinazione della proiezione P_z)



Osservazione 11 Molto spesso i tre assi coordinati si scelgono tra loro ortogonali. In tal caso si parla di SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE. Ciò è quello che noi faremo generalmente in seguito; si noti però che un sistema di riferimento cartesiano ortogonale disegnato su un corpo segue le deformazioni del corpo e, dopo una deformazione, non è più ortogonale (e spesso nemmeno descritto da rette; si troverà un sistema di riferimento "curvilineo" che non studieremo salvo che in casi particolari). ∎

L'introduzione del metodo delle coordinate ha provocato, nel corso del XVII secolo, un cambiamento radicale del punto di vista in geometria: volendo lavorare con punti dello spazio, e con insiemi di punti, ossia con "luoghi geometrici", si preferisce pensare ai punti come terne (ordinate) di numeri e si identificano gli insiemi di punti mediante le "relazioni" tra le loro coordinate. E' nata così la *geometria analitica.*

Nel corso del XIX secolo, si è avuto un ulteriore cambiamento di punto di vista: l'oggetto inizialmente dato e da studiare non è più il punto, successivamente identificato mediante una terna di numeri, ma è la terna di numeri che, se farà comodo, verrà visualizzata come un punto. E quindi, invece di studiare "luoghi geometrici" ossia insiemi di punti, gli oggetti inizialmente dati da studiare saranno direttamente le terne ordinate di numeri e le relazioni intercorrenti tra essi. La ragione principale di ciò è descritta nell'esempio seguente, dal quale si vede che, in generale, la fisica suggerisce di studiare le *ennuple* (abbreviato n–ple) di numeri, di cui le terne sono un caso particolare utile per l'intuizione geometrica.

Esempio 12 La posizione di un punto materiale che si muove liberamente nello spazio è descritta da tre "parametri", le tre coordinate rispetto ad un assegnato sistema di riferimento. Col linguaggio della fisica si dice che il punto ha "tre gradi di libertà". Ma

per descrivere il moto di un'asta rigida ci vogliono 5 parametri: un'asta rigida ha "5 gradi di libertà". Per studiare il moto di un'asta rigida bisogna considerare $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, *quintupla ordinata* di numeri reali (in generale funzione del tempo), che non si rappresenta più come "punto" dello spazio ordinario.

Il moto dell'asta rigida sarà descritta da certe equazioni che legano i numeri x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ed anche la variabile tempo.

In generale, corpi più complessi saranno descritti da n–ple ordinate di numeri, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ∎

L'esempio precedente suggerisce di introdurre un linguaggio comodo per lo studio delle terne di numeri reali e quindi di usarlo per lo studio della geometria dello spazio. Ciò faremo con particolare attenzione a quei concetti che poi estenderemo ad n–ple ordinate di numeri reali. Studieremo quindi quest'ultimo caso. Diciamo però che nella prima parte, dedicata alla geometria di $\mathbb{R}^3$, faremo spesso riferimento all'intuizione geometrica, che ci fa "vedere" lo spazio a tre dimensioni, nonostante che ciò sia del tutto insoddisfacente. Infatti,[2] *la storia della geometria inizia più di 4000 anni fa mentre la prima definizione generale di geometria fu data nel 1872 dal matematico tedesco F. Klein. Fu necessaria la creazione della geometria non euclidea da parte di Nikolay Lobachevsky (russo) nel 1825 e (quasi contemporaneamente ma in modo indipendente) di Janos Bolyai (ungherese) e dopo che fu chiaro che il concetto intuitivo di "figura geometrica", che presupponeva che non potessero esistere più "geometrie", non poteva dare una fondazione sufficiente alla scienza della geometria.*

1.2.1 Lo spazio $\mathbb{R}^3$ e lo spazio $\mathbb{C}^3$; spazi vettoriali a tre dimensioni

Si indica col simbolo $\mathbb{R}^3$ l'insieme delle terne ordinate (x, y, z) di tre numeri reali. Se i tre numeri sono complessi si usa il simbolo $\mathbb{C}^3$.

La fisica insegna ad eseguire due operazioni importanti tra terne di numeri:

- la *moltiplicazione per scalari:* $a(x, y, z) = (ax, ay, az)$. Si noti che se vogliamo lavorare in $\mathbb{R}^3$ allora $a \in \mathbb{R}$ mentre in $\mathbb{C}^3$ la moltiplicazione si fa con $a \in \mathbb{C}$.
- la SOMMA "COMPONENTE PER COMPONENTE" $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$.

Lo spazio $\mathbb{R}^3$ (oppure $\mathbb{C}^3$) dotato di tali operazioni si chiama lo *spazio vettoriale reale (*oppure *complesso) a tre dimensioni.*

> E' del tutto ovvio che tali operazioni possono definirsi anche in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$, gli insiemi delle n–ple ordinate di numeri rispettivamente reali o complessi, che si chiameranno "spazi vettoriali, reali o complessi, ad n dimensioni" (formalizzeremo in seguito questi concetti. Per ora notiamo che il numero di dimensioni è in relazione col numero dei "gradi di libertà").

[2] si veda *geometric transformations,* di I.M. Yaglom, MAA, 1962.

Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano anche VETTORI o anche VETTORI LIBERI.

Indicheremo i vettori mediante lettere in grassetto, per esempio $\mathbf{v}$.

Da ora in poi, se non specificheremo esplicitamente il contrario, lavoreremo esclusivamente con vettori reali.

Osservazione sulla notazione

Per dire che un punto P ha coordinate ordinatamente x, y, z scriveremo $P(x, y, z)$. La terna ordinata dei tre numeri x, y e z è a sua volta un vettore che conviene scrivere in *colonna:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Questo è scomodo da un punto di vista grafico. Allora scriveremo

$$(x, y, z)^T \quad \text{per intendere} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

In questo caso l'apice ^{T} si legge "trasposto". Meglio ancora, indichiamo con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ i tre vettori particolari

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Usando le operazioni introdotte tra i vettori, si vede che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,.$$

I tre vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si chiamano i VERSORI DEGLI ASSI COORDINATI[3] (il significato generale del termine "versore" è spegato al paragrafo 1.4). I tre vettori $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ sono le PROIEZIONI del vettore sugli assi coordinati e si parla di PROIEZIONE ORTOGONALE se gli assi cartesiani sono ortogonali, altrimenti si parla di PROIEZIONE OBLIQUA. Essi si chiamano anche le COMPONENTI DEL VETTORE LUNGO GLI ASSI COORDINATI mentre i numeri x, y e z sono le COORDINATE DI $P(x, y, z)$ e, sfortunatamente, si chiamano anche le COMPONENTI di $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Quindi il termine "componente" ha due significati diversi. Può indicare un numero oppure un vettore.

[3] A rigore, anche $-\mathbf{i}$ è uno dei due versori dell'asse delle ascisse: quello che ne indica la semiretta negativa. Usa però privilegiare il versore $\mathbf{i}$ che "punta" nella semiretta positiva. Analoga osservazione per gli altri due assi.

Osservazione 13 (Sulla notazione) Per maggior chiarezza indicheremo i numeri x, y, z col termine(COEFFICIENTI DELLE) COMPONENTI. Metteremo "coefficienti delle" tra parentesi perché usualmente queste parole vengono omesse e anche noi le ometteremo quando utile a non appesantire il testo. ∎

1.3 Vettori liberi e vettori applicati

Gli argomenti che ora presentiamo si applicano sia al piano che allo spazio. Le figure sono fatte nel piano perché così risultano più comprensibili.

Abbiamo introdotto i vettori liberi come terne ordinate di numeri. In fisica è più conveniente lavorare con i *vettori applicati* che ora andiamo a definire.

Introduciamo prima di tutto i vettori applicati nell'origine. Ricordiamo che una terna ordinata (x_0, y_0, z_0) rappresenta sia il vettore libero $x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ che il punto $P(x_0, y_0, z_0)$: il punto identifica il vettore e vicevera. Più precisamente, al vettore si fa corrispondere Il segmento di estremi O e P orientato da O verso P. Quando il vettore si interpreta in questo modo, esso si chiama *vettore applicato in* O e si dice che il segmento OP, orientato da O verso P, RAPPRESENTA il vettore applicato nell'origine. L'origine O si chiama il PRIMO ESTREMO ed il punto P si chiama il SECONDO ESTREMO del vettore $\mathbf{v}$.

Un vettore applicato in O si indica con uno dei due simboli $P - O$ oppure con una lettera in grassetto, $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, come i vettori liberi, sottintendendo O.

Il vettore $O - O$, ossia $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, che corrisponde al segmento collassato nell'origine, si indica col simbolo 0.

Oltre ai vettori applicati nell'origine conviene anche considerare vettori applicati in un punto P diverso dall'origine. Si intende con ciò la coppia $(P, \mathbf{w})$ del punto P e del vettore $\mathbf{w}$. Diremo che la coppia $(P, \mathbf{w})$ è un VETTORE APPLICATO IN P. Diciamo anche che il vettore $(P, \mathbf{w})$ è ottenuto TRASLANDO PER PARALLELISMO il vettore $\mathbf{w}$, inizialmente applicato in O, fino al punto P.

Osservazione 14 Per consistenza di notazione, un vettore $\mathbf{w}$ applicato in O andrebbe indicato col simbolo $(O, \mathbf{w})$. Per semplicità lo indicheremo col solo simbolo $\mathbf{w}$ e *da ora in poi un vettore il cui punto di applicazione non è esplicitamente indicato si intenderà applicato in* O. ∎

Tra i vettori applicati *nel medesimo punto* si introducono le operazioni seguenti:

$$\alpha(P, \mathbf{w}) = (P, \alpha\mathbf{w}), \qquad (P, \mathbf{w}) + (P, \mathbf{v}) = (P, \mathbf{w} + \mathbf{v}).$$

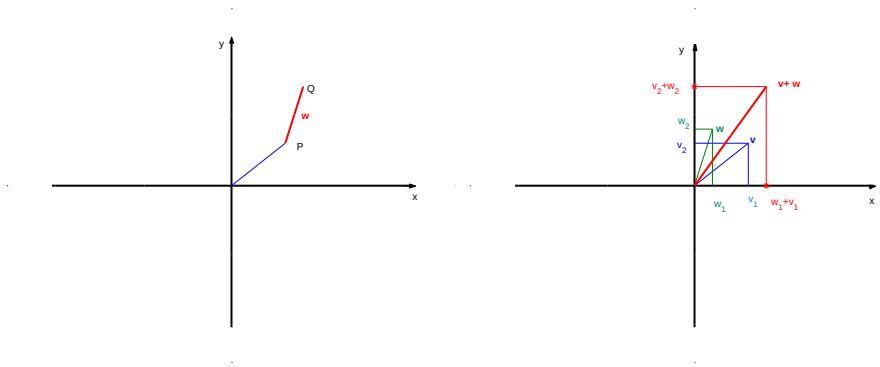
NON DEFINIREMO OPERAZIONI TRA VETTORI APPLICATI IN PUNTI DIVERSI.

Osservazione 15 Talvolta la fisica usa operazioni tra vettori applicati in punti diversi: il momento di una forza $\mathbf{f}$ applicata nel punto P rispetto al punto O è il

"prodotto vettoriale" tra il vettore spostamento $P - O$, applicato in O, e il vettore forza, applicato in P. Noi non faremo mai uso di tali operazioni. ∎

Le applicazioni fisiche insegnano a *non confondere* P con $\mathbf{w}$ nonostante che P stesso sia un vettore: per esempio P può essere una posizione e $\mathbf{w}$ una forza. Però in geometria i vettori sono considerati tutti della stessa natura (tutti "vettori spostamento").

Figura 1.2: Sinistra: il vettore $\mathbf{w}$ applicato nel punto P; destra: la somma di due vettori ottenuta mediante la definizione, ossia sommando le componenti corrispondenti



Ripetiamo:

- il vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ si intende come vettore che trasla l'origine nel punto $P(v_1, v_2)$. Se vogliamo sottilineare il fatto che *il vettore trasla l'origine* lo scriviamo come la coppia $(O, \mathbf{v})$ ma generalmente scriveremo $\mathbf{v}$ usando la medesima notazione per i vettori liberi e per i vettori applicati nell'origine.

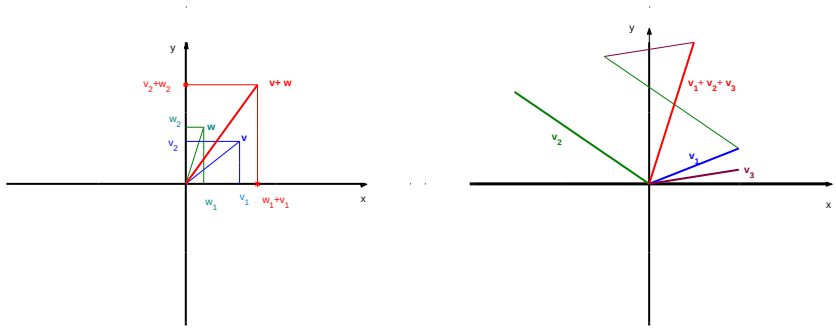
- il simbolo $(P, \mathbf{w})$, con $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ e $P(x_0, y_0, z_0)$, si interpreta come lo spostamento rettilineo di un punto che, inizialmente in P, raggiunge il punto $Q(x_0 + w_1, y_0 + w_2, z_0 + w_3)$.

  Il punto $Q(x_0 + w_1, y_0 + w_2, z_0 + w_3)$ si dice il TRASLATO DI P MEDIANTE IL VETTORE $\mathbf{w}$ e si dice che P è il primo e che Q è il secondo estremo del vettore traslato.

Le considerazioni precedenti suggeriscono di RAPPRESENTARE il vettore $\mathbf{w}$, applicato in P, col segmento che congiunge P con Q, *orientato* da P verso Q. Si veda la figura 1.2 a sinistra.

Ciò conduce a due modi di sommare due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati nell'origine: il primo è quello di sommarne le componenti corrispondenti, come dice la definizione, ed

Figura 1.3: Traslazioni e somma di vettori



è rappresentato nella figura 1.2 a destra; il secondo consiste nel disegnare lo spostamento individuato da $\mathbf{v}$, che porta O nel punto P, seguito dallo spostamento individuato da $\mathbf{w}$, che porta il punto P nel punto Q, come nella figura 1.3 a sinistra.

Questo secondo modo è particolarmente comodo quando si voglia rappresentare graficamente la somma di più vettori, come nella figura 1.3 a destra.

Introduciamo ora un'ultima notazione. Dati due punti $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x, y, z)$, il vettore (applicato in O)

$$\mathbf{w} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

si rappresenta anche col simbolo $Q - P$. Dunque *il simbolo $Q - P$ rappresenta sempre un vettore applicato nell'origine.*

Sia ora $\mathbf{v}$ il vettore $(P - O) - (Q - O)$ (si ricordi, applicato in O). Le regole delle operazioni tra vettori applicati in O mostrano che

$$(P - O) = (Q - O) + \mathbf{v}\,. \tag{1.11}$$

D'altra parte quando il punto di applicazione è O, usa sottintenderlo e si scrive anche P invece di $P - O$ (confondendo così la notazione che indica il vettore con quella che indica il punto d'arrivo P dello spostamento corrispondente). In questo modo, la (1.11) assume anche la forma, un po' ambigua ma comoda,

$$P = Q + \mathbf{v}\,.$$

Direzioni e verso

Tra i vettori *non nulli* di $\mathbb{R}^3$ *applicati nell'origine* si può introdurre questa relazione di equivalenza: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ quando esiste $a \neq 0$ tale che $\mathbf{w} = a\mathbf{v}$. Le classi di equivalenza

sono gli insiemi $[\mathbf{v}] = \{a\mathbf{v}\,,\ a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 0\}$. Queste classi di equivalenza si chiamano le DIREZIONI di $\mathbb{R}^3$.

Tra i vettori della medesima classe di equivalenza si può introdurre una seconda relazione di equivalenza: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ quando esiste $a > 0$ tale che $\mathbf{w} = a\mathbf{v}$. Dunque, nella classe di equivalenza $[\mathbf{v}]$ esistono due "sotto"classi di equivalenza: quella identificata da $\mathbf{v}$ stesso e quella identificata da $-\mathbf{v}$. Questi si chiamano i due VERSI nella direzione $\{a\mathbf{v}\,,\ a \neq 0\}$.

Il concetto di direzione e di verso può trasferirsi dai vettori applicati nell'origine ai vettori applicati in P come segue: la direzione e verso di $(P, \mathbf{w})$ è quello di $\mathbf{w}$; e quindi, per esempio, i vettori $(P, \mathbf{w})$ e $(Q, -2\mathbf{w})$, applicati in punti diversi, hanno la stessa direzione ma verso opposto.

1.3.1 Traslazioni

L'operazione di traslazione si può applicare agli assi coordinati traslando il sistema di riferimento oppure, in un fissato sistema di riferimento, ai vettori. Questo secondo caso di fatto è già stato studiato ed aggiungeremo un considerazione semplice ma importante.

1.3.2 traslazione di un vettore

Fissato un sistema di riferimento cartesiano, sia $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ un vettore. Come si è già detto, la traslazione di un qualsiasi vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (applicato nell'origine) mediante il vettore $\mathbf{w}$ è

$$zbv + \mathbf{w} = (x + a)\mathbf{i} + (y + b)\mathbf{j} + (z + c)\mathbf{k}\,.$$

In queste considerazioni i vettori sono vettori liberi, ossia le terne dei numeri che li identificano o, equivalentemente, sono applicati nell'origine.

Il fatto ovvio che ci preme sottolineare è che se si applicano due diverse traslazioni una dopo l'altra, il vettore traslato non dipende dall'ordine delle traslazioni: se $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ allora

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{w}_1 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{w}_1)\,.$$

Questa osservazione è del tutto ovvia ma importa sottolinearla esplicitamente perchè vedremo nel paragrafo 1.7.2 che il fatto analogo non vale per le rotazioni.

1.3.3 traslazione degli assi coordinati

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, la cui origine è O. Si fissi quindi un punto $O'(x_0, y_0, z_0)$.

Il punto O' è il traslato di O mediante il vettore $\mathbf{v} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$. In O' applichiamo i tre versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ identificando così tre rette mutuamente ortogonali per

O' e su ciascuna di esse viene ad essere scelta la semiretta positiva. Si ottiene quindi un secondo sistema di assi cartesiani x', y' e z', con origine O', che diremo ottenuto traslando in O' quello originariamente in O.

Pensiamo inizialmente al caso $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. In questo caso (rappresentato, nel caso piano, dalla figura 1.4 q sinistra) i due sistemi di riferimento hanno il medesimo asse delle ascisse.

Sia Q un punto dello spazio le cui coordinate rispetto al primo sistema di riferimento sono x, y, z mentre rispetto al secondo sono x', y', z'. E' del tutto ovvio che

$$x' = x - x_0\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,.$$

In generale se anche $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$ si ha

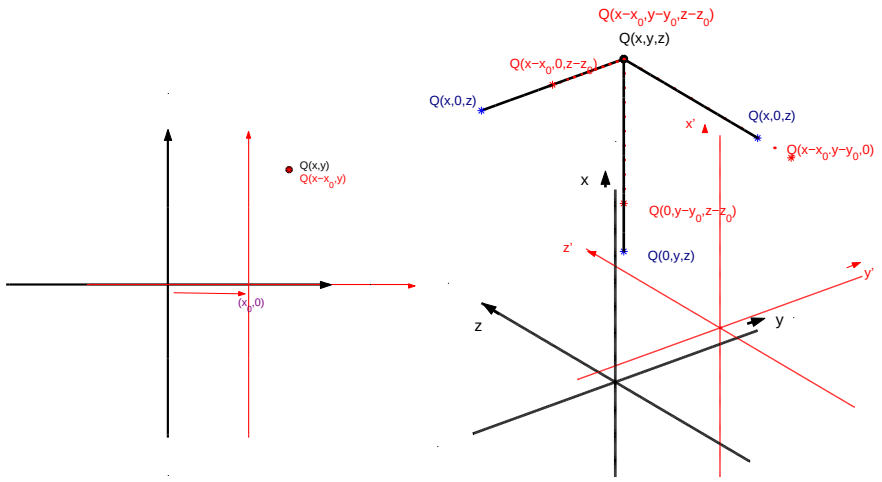
$$x' = x - x_0\,, \qquad y' = y - y_0\,, \qquad z' = z - z_0\,.$$

Questa relazione si chiama la REGOLA DI TRASLAZIONE DEGLI ASSI COORDINATI. Essa ha una semplice interpretazione per mezzo delle operazioni tra vettori: sia $\mathbf{v}_Q$ il "vettore spostamento" che corrisponde a Q e sia $\mathbf{v}_{O'}$ il vettore spostamento che corrisponde ad O' ambedue rispetto all'iniziale sistema di riferimento, quello di origine O.

Si vede dalla figura che il vettore spostamento da O a Q si ottiene sommando lo spostamento $\mathbf{v}_{O'}$ col vettore che congiunge O' con Q e quindi vale

$$x = x' + x_0\,, \qquad y = y' + y_0\,, \qquad z = z' + z_0\,.$$

Figura 1.4: Traslazione di assi coordinati



Osservazione 16 Se applichiamo successivamente due traslazioni degli assi coordinati, la rappresentazione che si ottiene per i vettori non dipende dall'ordine nel quale le traslazioni vengono eseguite. ∎

1.4 Distanza tra punti ed equazioni della circonferenza e della sfera

Dal punto di vista della rappresentazione dello spazio mediante terne di numeri, non c'è ragione di introdurre coordinate cartesiane *ortogonali.* Una qualsiasi terna di rette non complanari permette di rappresentare biunivocamente lo spazio per mezzo di terne di numeri. E' comodo usare coordinate cartesiane *ortogonali* per il calcolo di distanze. Siano $P(x, y)$ e $Q(x_0, y_0)$ due punti per esempio del piano, come in figura.

Il teorema di Pitagora mostra che la loro distanza è

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

grazie al fatto che le rette disegnate a tratteggio in Fig. 1.5 (sinistra) si intersecano ortogonalmente.

Analogamente, dati $P(x, y, z)$ e $Q(x_0, y_0, z_0)$, la loro distanza è

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\,. \tag{1.12}$$

La distanza di un punto $P(x, y, z)$ da O è

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Si veda la Fig. 1.5 a destra.

Ricordiamo che se $P = P(x, y, z)$, la notazione $P - O$ indica il vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ applicato nell'origine. Parallelamente al concetto di distanza, conviene introdurre quello di NORMA di un vettore

$$\|\mathbf{v}\| = \|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

così che

$$d(P.Q) = \|P - Q\|\,.$$

La distanza e la norma hanno le seguenti proprieà:

1. la distanza e la norma sono positive o nulle e inoltre:

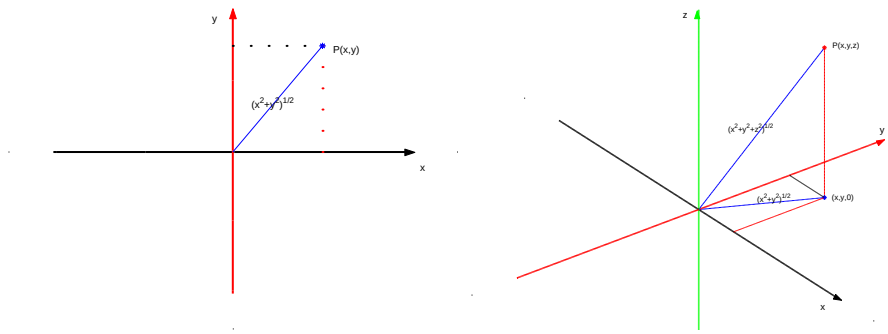
   la distanza è nulla, $d(P, Q) = 0$, se e solo se $P = Q$.

   si ha $\|\mathbf{v}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = 0$.

2. proprietà di simmetria:

   si ha $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Figura 1.5: Sinistra: il teorema di Pitagora vale se si scelgono assi cartesiani *ortogonali*. Destra: il teorema di Pitagora per il calcolo delle distanze in $\mathbb{R}^3$



si ha $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$**.**

3. proprietà di omogeneità:

   per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ **si ha** $d(P(\alpha x, \alpha y, \alpha z), Q(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = |\alpha| d(P, Q)$
   per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ **si ha** $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{v}\|$**.**

4. La distanza è invariante per traslazioni nel senso che ora descriviamo. Siano $P(x, y, z)$ e $Q(x_0, y_0, z_0)$ due punti e sia $\mathbf{v}$ un vettore, $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. I traslati di P e Q mediante $\mathbf{v}$ sono i punti $P_1(x + a, y + b, z + c)$ e $Q_1(x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$. Si ha

$$d(P, Q) = d(P_1, Q_1)\,.$$

Osservazione 17 (Sulla notazione) la norma di un vettore si indica anche con la semplice sbarra: $|\mathbf{v}|$ invece di $\|\mathbf{v}\|$. Inoltre, talvolta $\|\mathbf{v}\|$ viene chiamato il MODULO del vettore $\mathbf{v}$.

I vettori di norma 1 si chiamano VERSORI o anche VETTORI NORMALIZZATI. Dunque sono versori sia $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, sia anche, per esempio,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\,. \quad \blacksquare$$

Identificata una formula per la distanza è ovvio come trovare equazioni che vengono soddisfatte dai punti di una circonferenza o di una sfera: se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il centro ed r il raggio, $P(x, y, z)$ appartiene alla sfera se e solo se

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\,. \tag{1.13}$$

Se siamo invece sul piano, l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{1.14}$$

descrive i punti della circonferenza di centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio r.

Chiediamoci cosa rappresenta l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{1.15}$$

tra le coordinate (x, y, z) di *punti dello spazio.*

I punti $P(x, y, 0)$ sono i punti della corconferenza di centro O e raggio r che si trova sul puano (x, y).

Se $(x, y, 0)$ soddisfa l'equazione, allora anche (x, y, z) soddisfa l'equazione, per ogni z. Ma, al variare di z, i punti (x, y, z) sono tutti i punti della retta parallela all'asse z, che stanno sopra o sotto al punto $(x, y, 0)$ Dunque, l'equazione (1.15) rappresenta un cilindro circolare retto, con asse parallelo all'asse z. Torneremo più avanti allo studio dei cilindri.

La geometria piana è stata richiamata nel corso di Analisi matematica 1 e in quel corso sono state studiate le ellissi e le iperboli con fuochi sugli assi coordinati e simmetrici rispetto all'origine. Per esercizio si calcolino le equazioni di tutte le ellissi e di tutte le iperboli che hanno per fuochi i generici punti (x_0, y_0) ed (x_1, y_1).

Torniamo ora a considerare, per esempio, l'equazione (1.14) della corconferenza. E' questa un'equazione che viene soddisfatta dalle coordinate (x, y) se e solo se il punto corrispondente sta sulla circonferenza. Ci sono però altri modi di rappresentare una circonferenza. Per esempio $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è un vettore il cui secondo estremo giace sulla circonferenza quando

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| = r$$

con $\mathbf{v}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$. Questa però è una diversa formulazione della (1.14). Notiamo tuttavia che i versori del piano sono rappresentati da $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ e quindi il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ha lunghezza r se

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + r(\cos\theta)\mathbf{i} + r(\sin\theta)\mathbf{j}$$

o, in componenti,

$$x = x_0 + r\cos\theta\,, \qquad y = y_0 + r\sin\theta\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Quest'espressione dà esplicitamente le coordinate x ed y dei punti della circonferenza, in funzione di un parametro θ. Per questa ragione si chiama L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA CIRCONFERENZA mentre la (1.14) si chiama L'EQUAZIONE CARTESIANA della circonferenza.

In modo analogo si vede che UN'EQUAZIONE PARAMETRICA della sfera è

$$x = x_0 + r(\cos\theta)\sin\phi\,, \quad y = y_0 + r(\sin\theta)\sin\phi\,, \quad z = z_0 + r\cos\phi\,.$$

Osservazione 18 Ribadiamo che nè l'equazione cartesiana né quella parametricha sono uniche. Per esempio,

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y = r^2 - x_0^2 - y_0^2$$

oppure

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^3 = 0$$

sono diverse equazioni cartesiane della circonferenza; mentre

$$x = x_0 + r\cos 2\theta\,, \qquad y = y_0 + r\sin 2\theta\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

è una diversa equazione parametrica. ∎

La distanza può definirsi e calcolarsi anche se il sistema di riferimento cartesiano non è ortogonale. Però le formule sono più complicate. Per questa ragione da ora in poi assumeremo di lavorare in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

1.5 Prodotto scalare ed angoli

Ricordiamo che da ora in poi usiamo sistemi di riferimento cartesiani *ortogonali.*

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori *REALI*,

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}\,.$$

Come PRODOTTO SCALARE dei due vettori si intende il *numero*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3\,.$$

Si noti che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ interviene nella definizione della norma:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,.$$

Ci si può quindi aspettare che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ abbia un significato geometrico anche se $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Per vedere ciò consideriamo il caso in cui i vettori appartengono al piano x, y e sono versori: $\|\mathbf{w}\| = 1$ e $\|\mathbf{v}\| = 1$. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{w} = (\cos\phi)\mathbf{i} + (\sin\phi)\mathbf{j}\,.$$

Precisiamo il significato geometrico degli angoli. Consideriamo il vettore $\mathbf{v}$. L'angolo θ è l'angolo tra la semiretta positiva delle ascisse e il segmentoi che congiunge O col punto P secondo estremo del vettore $\mathbf{v}$. Analoga interpretazione vale per ϕ: è l'angolo tra la semiretta positiva delle ascisse e il segmento che congiunge O con Q, secondo estremo del vettore $\mathbf{w}$. E quindi $\theta - \phi$ è l'angolo tra i due segmenti. Lo chiameremo

brevemente L'ANGOLO TRA I DUE VETTORI. Si noti che l'angolo non dipende dalla norma del vettore: $\mathbf{v}$ ed $\alpha\mathbf{v}$ con $\alpha > 0$ fanno lo stesso angolo con la semiretta positiva delle ascisse; e quindi l'angolo tra $\alpha\mathbf{v}$ e $\alpha\mathbf{w}$ non dipende da $\alpha > 0$.

Calcolando $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ si trova

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi)\,.$$

Il prodotto scalare di due versori *è uguale al coseno dell'angolo tra essi compreso.*

Il caso di generici vettori del piano xy si riconduce facilmente al precedente, notando che

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \left(\frac{a}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{b}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} \right), \qquad \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \left(\frac{a_1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{i} + \frac{b_1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{j} \right)$$

e i vettori tra parentesi hanno modulo 1. Dunque, *il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto delle norme dei vettori a sua volta moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \cos\omega \qquad \omega \text{ angolo compreso tra i due vettori}\,. \tag{1.16}$$

Osservazione 19 Notiamo che i vettori individuano una direzione e un verso. Le due direzioni individuano due rette e due angoli tra esse, uno acuto e uno ottuso. I vettori individuano, oltre alle direzioni, anche il verso su di esse. Ossia identificano due semirette. Il coseno che interviene nella definizione di prodotto scalare è positivo se le due semirette individuano un angolo acuto e negativo se individuano un angolo ottuso. E' nullo se le due semirette sono ortogonali. ∎

Ne viene in particolare che il coseno dell'angolo θ compreso tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si calcola facilmente mediante la formula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} \quad \text{dove si richiede } 0 \le \theta \le \pi\,. \tag{1.17}$$

Se l'angolo è nullo, ossia se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$*, i due vettori si dicono* ORTOGONALI *e si scrive* $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$*.*

Osservazione 20 Se interessa l'angolo tra le direzioni dei due vettori allora si considera

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} \quad \text{dove si richiede } 0 \le \theta \le \pi/2\,. \quad ∎ \tag{1.18}$$

Queste considerazioni sono state svolte per vettori del piano x, y ma le conclusioni valgono[4] per generici vettori di $\mathbb{R}^3$. In particolare, la formula (1.17) vale anche in $\mathbb{R}^3$.

[4]perché il prodotto scalare di due vettori è una proprietà dei vettori del piano per l'origine e per i secondi estremi dei vettori.

Le proprietà della norma e del prodotto scalare

Ripetiamo e completiamo le proprietà della norma viste al paragrafo 1.4:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}\| \geq 0 \\
&\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0 \\
&\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{v}\| \\
&\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \qquad \text{(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)}\,.
\end{aligned}$$

La disuguaglianza trangolare si prova facilmente notando prima di tutto che la (1.16) mostra che

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \qquad \text{(DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ)}$$

e quindi che

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \leq \|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2+2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|)^2\,.$$

Si noti, da questo calcolo:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2 \iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0 \quad \text{ossia se e solo se } \mathbf{v}\perp\mathbf{w}\,.$$

Questa uguaglianza è niente altro che il TEOREMA DI PITAGORA. Vale inoltre la seguente uguaglianza nota come IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2\,.$$

Questa identità si trova sommando

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \text{con} \quad \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})\,.$$

Interpretando come la somma di vettori come somma con la regola del parallelogramma si trova immediatamente l'interpretazione dell regola del parallelogramma: *la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui quattro lati*, si veda la Fig. 1.6.

Indichiamo sia i punti che i vettori liberi di $\mathbb{R}^n$ mediante le matrici $1 \times n$ delle coordinate del punto, rispettivamente (coefficienti delle) componenti del vettore. Per vettori

$$\mathbf{v} = (v_1\,, v_2\,, \ldots\, v_n)^T\,, \qquad \mathbf{w} = (w_1\,, w_2\,, \ldots\, w_n)^T$$

di $\mathbb{R}^n$ si definisce ancora

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n\,.$$

In generale, si definisce L'ANGOLO TRA DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$ mediante una formula analoga alla (1.17):

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,. \tag{1.19}$$

Questa formula identifica in modo unico l'angolo $\theta \in [0, \pi)$.
Nello studio della geometria analitica generalmente si lavora con vettori reali. La definizione di prodotto scalare però si estende anche a vettori complessi (si veda il paragrafo 2.8). La definizione però è *diversa:* se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ appartengono a $\mathbb{C}^n$ allora si definisce

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2 + \cdots + \bar{v}_n w_n\,.$$

Si introducono i coniugati perché si vuole che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ sia reale non negativo e si definisce ancora

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,.$$

Si noti che il prodotto scalare *non* dipende dall'ordine dei fattori se i vettori sono reali. Invece, se i vettori sono complessi,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}\,.$$

Diremo che due vettori (reali o complessi) $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ORTOGONALI se il loro prodotto scalare è nullo:

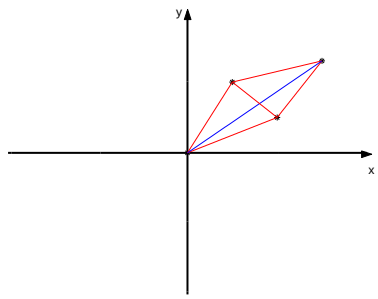
$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\,.$$

Le proprietà che abbiamo enunciato per la norma, il teorema di Pitagora, l'identità del parallelogramma e la disuguaglianza di Schwarz valgono in ogni dimensione e valgono anche per vettori di $\mathbb{C}^n$.

Osservazione 21 L'angolo è stato definito solamente per vettori reali così che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \mathbb{R}$ quindi l'angolo θ è un numero reale. Ciò nonostante, se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ diremo che i due vettori sono ortogonali anche se sono vettori complessi. ∎

Queste considerazioni verranno ripetute e precisate al paragrafo 2.8.

Figura 1.6: Il parallelogramma e le sua diagonali



Osservazione 22 Il prodotto righe per colonne di due matrici A e B, la prima $1 \times n$ e la seconda $n \times 1$ è

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,.$$

E' quindi il prodotto scalare dei vettori *ad elementi reali* $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Dunque il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *di due vettori reali* è uguale al prodotto righe per colonne

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{v}$$

dove, ricordiamo, l'apice ^{T} indica la trasposizione. Invece se i due vettori hanno elementi complessi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}^* \mathbf{v}$$

ancora prodotto righe per colonne della matrice $n \times 1$ rappresentata da v per la *coniugata* della matrice $\mathbf{w}$.

Questa osservazione spiega anche l'introduzione delle matrici coniugate ed aggiunte. La ragione è che valgono le formnule seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w}) &= (A^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} && \text{(elementi reali)} \\ \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w}) &= (A^* \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} && \text{(elementi complessi)}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 23 (Sulla notazione) Si noti che il prodotto righe per colonne di matrici si indica con la sola giustapposizione mentre si usa "·" per indicare il prodotto scalare. Dunque, $\mathbf{wv}$ indica un prodotto riche per colonne che richiede che $\mathbf{w}$ sia un vettore riga e $\mathbf{v}$ un vettore colonna mentre $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ indica il prodotto scalare di due vettori. ∎

1.5.1 Coseni direttori in $\mathbb{R}^3$

Abbiamo già usato una particolare rappresentazione dei vettori, che è questa:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = |\mathbf{v}| \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}\mathbf{k} \right)$$

I (coefficienti delle) componenti del versore

$$\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}\mathbf{k}$$

hanno un significato particolare: la prima è il prodotto scalare del versore $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ col versore $\mathbf{i}$; e quindi è il coseno dell'angolo che $\mathbf{v}$ fa col semiasse positivo delle ascisse.

Analogamente si vede che la seconda componente è il coseno dell'angolo col semiasse positivo delle ordinate e la terza è il coseno dell'angolo col semiasse positivo delle quote. Questi tre numeri si chiamano i COSENI DIRETTORI del vettore $\mathbf{v}$. Indicandoli con $\cos\theta_i$ si trova la rappresentazione

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \left(\mathbf{i}\cos\theta_1 + \mathbf{j}\cos\theta_2 + \mathbf{k}\cos\theta_3 \right) .$$

In apparenza quindi $\mathbf{v}$ viene a dipendere dai 4 parametri $|\mathbf{v}|$ e $\cos\theta_i$. Si noti però che questi ultimi *non* sono indipendenti, perché vale

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1 .$$

Dunque, il numero dei parametri indipendenti è 3.

Notiamo infine l'interpretazione geometrica del versore

$$\mathbf{i}\cos\theta_1 + \mathbf{j}\cos\theta_2 + \mathbf{k}\cos\theta_3 .$$

Questo versore indica il punto nel quale la semiretta $t\mathbf{v}$, $t > 0$ incontra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1.5.2 Proiezione di un vettore nella direzione di un'altro

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori. Definiamo

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} .$$

In particolare, *se* $\mathbf{w}$ *è un versore,*

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} \,.$$

E' immediato verificare che

$$\mathbf{w} \perp [\mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}] \,.$$

Per questa ragione il vettore $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ si chiama la PROIEZIONE ORTOGONALE di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{w}$.

La rappresentazione

$$\mathbf{v} = P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} + [\mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}]$$

è di uso frequente in fisica.

1.6 Prodotto vettoriale e prodotto misto

In $\mathbb{R}^3$, ripetiamo in $\mathbb{R}^n$ con $n = 3$ e solo in questo caso, può definirsi un'operazione di PRODOTTO VETTORIALE che a due vettori ne associa un terzo. Questa operazione, che indicheremo col simbolo $\wedge$, si definisce in due passi. Prima definiamo

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \,, & \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \,, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \,, \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k} \,, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i} \,, & \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \,, \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0 \,, & \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0 \,, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \,. \end{array}$$

Definiamo quindi

$$\begin{aligned} v \wedge w &= (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \wedge (w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}) \\ &= v_1 w_1 \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + v_1 w_2 \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + \cdots \\ &= (v_2 w_3 - w_2 v_3)\mathbf{i} - (v_1 w_3 - v_3 w_1)\mathbf{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mathbf{k} \,. \end{aligned}$$

E' facile verificare che vale la distributività del prodotto sulla somma,

$$v_1 \wedge (v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3 \,.$$

Però, *il prodotto vettoriale NON è commutativo.* Vale invece:

$$v \wedge w = -w \wedge v \,.$$

Il prodotto vettoriale NON è nemmeno associativo. Infatti,

$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = 0 \neq \mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = -\mathbf{j} \,.$$

Dunque, se è necessario fare il prodotto vettoriale di tre vettori *è essenziale* l'uso delle parentesi, per indicare come i vettori vanno associati.

Esaminiamo ora il significato geometrico del prodotto vettoriale. Notiamo prima di tutto che se v e w sono uno multiplo dell'altro, il loro prodotto vettoriale è nullo:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{w} = tv_1\mathbf{i} + tv_2\mathbf{j} + tv_3\mathbf{k} \qquad \Longrightarrow v \wedge w = 0\,.$$

Due vettori uno multiplo dell'altro si chiamano anche COLINEARI. Per dire che due vettori sono colineari scriveremo

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}\,.$$

Viceversa, se il prodotto vettoriale è nullo allora

$$v_2w_3 - w_2v_3 = 0\,, \quad v_1w_3 - v_3w_1 = 0\,, \quad v_1w_2 - v_2w_1 = 0\,.$$

Scrivendo queste relazioni mediante i determinanti si ha

$$\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Il teorema 3 mostra che le colonne della matrice

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

sono proporzionali. Dunque:

Teorema 24 *Due vettori sono colineari se e solo se il loro prodotto vettoriale è nullo.*

Un calcolo diretto inoltre mostra che

Teorema 25 *il vettore* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *è ortogonale sia a* $\mathbf{v}$ *che a* $\mathbf{w}$.

Siano ora $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Il loro prodotto vettoriale è

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (v_1w_2 - v_2w_1)\mathbf{k}\,.$$

Siano θ e ϕ angoli per cui

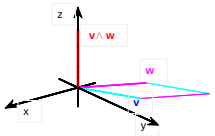
$$v_1 = |\mathbf{v}|\cos\theta\,, \quad v_2 = |\mathbf{v}|\sin\theta\,; \qquad w_1 = |\mathbf{w}|\cos\phi\,, \quad w_2 = |\mathbf{w}|\sin\phi\,.$$

Si ha

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \{\, |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \sin(\phi - \theta)\,\}\mathbf{k}$$

e quindi il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è l'area del parallelogramma individuato dai due segmenti del piano x, y che corrispondono ai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Inoltre, il coefficiente di $\mathbf{k}$ è positivo se $\sin(\phi - \theta) > 0$ e quindi se *il segmento che rappresenta il primo vettore si riporta su*

Figura 1.7: Il prodotto vettoriale $v \wedge w$



quello che rappresenta il secondo facendolo ruotare (dell'angolo minore) in verso antiorario[5] si veda la Fig. 1.7:

Quest'interpretazione vale anche se la terza componente non è nulla.

Se i vettori sono colineari il parallelogramma degenera in un segmento e quindi la sua area è nulla. Si ritrova quindi il Teorema 24.

Si è già visto che il prodotto vettoriale dei due generici vettori $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ si può rappresentare mediante le matrici come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \wedge (w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}) \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\mathbf{i} - (v_1w_3 - v_3w_1)\mathbf{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\,.
\end{aligned}$$

Questo suggerisce una regola mnemonica per il calcolo del prodotto vettoriale, che è la seguente: si scrive la tabella qui sotto, che *non* è una matrice perché la prima riga *non* contiene numeri:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale si ottiene trattandola *come se fosse* una matrice, e sviluppandone il determinante per la prima riga.

Si considerino ora tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Si chiama PRODOTTO MISTO il prodotto

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)\,.$$

[5] più correttamente: nello stesso verso con cui $\mathbf{i}$ si riporta su $\mathbf{j}$ ruotandolo dell'angolo minore. In pratica, in verso antiorario perché sul piano usa disegnare $\mathbf{i}$ che punta a destra e $\mathbf{j}$ che punta in alto; nello spazio usa disegnare gli assi in modo tale che il semiasse positivo delle ascisse ruoti in verso antiorario (intorno all'asse delle quote) per sovrapporsi al semiasse positivo delle ordinate.

E' immediato il significato del modulo del prodotto misto: si ricordi che $|(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)|$ è l'area del parallelogramma identificato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Facendo il valore assoluto del prodotto scalare per $\mathbf{v}_1$ si trova *il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori;* e il prodotto misto è positivo se il terzo vettore ha (coefficiente della) componente positiva su $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. In particolare, *il prodotto misto è nullo se e solo se i tre vettori sono complanari.*

E' utile esprimere il prodotto misto mediante i determinanti. Si vede immediatamente che, se $\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{i} + b_i\mathbf{j} + c_i\mathbf{k}$, allora

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

1.6.1 Prodotto vettoriale ed orientazione di $\mathbb{R}^3$

Si è detto che il prodotto vettoriale di $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$ ha (coefficiente della) componente positiva lungo l'asse z se *il segmento che rappresenta il primo vettore si riporta su quello che rappresenta il secondo facendolo ruotare (dell'angolo minore) in verso antiorario.* E' questo un caso particolare della REGOLA DI AMPÈRE: *la coppia dei due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *del piano* xy*, dati in quest'ordine, si dice* POSITIVA *se un osservatore con i piedi in* O *e la testa nella direzione positiva sull'asse delle quote, vede che è* antioraria *la rotazione che riporta il segmento di* $\mathbf{v}$ *su quello di* $\mathbf{w}$ *secondo l'angolo minore.* Equivalentemente: *se il segmento che rappresenta* $\mathbf{v}$ *ruota secondo l'angolo minore per riportarsi su quello che rappresenta* $\mathbf{w}$ *esso descrive un'arco di circonferenza. La coppia ordinata* $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *è positiva quando un insetto che si muove sulla circonferenza insieme all'estremo di* $\mathbf{v}$*, guardando nella direzione del moto, vede il disco alla sua sinistra.*

Ora, il vettore $\mathbf{v}_3$ punta nella direzione positiva di $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ quando

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 > 0 .$$

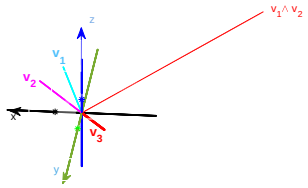
In questo caso diremo che i tre vettori, dati in quell'ordine, costituiscono una TERNA!ORIENTATA POSITIVAMENTE, o una TERNA POSITIVA. Equivalentemente diremo che sono orientati in modo concorde alla terna $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Si veda la Fig. 1.8.

Useremo questa terminologia in ogni caso, anche se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non giacciono sul piano xy. La giustificazione di ciò si vedrà al paragrafo 1.7.3.

1.6.2 Operazioni tra vettori applicati

Le operazioni di prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto misto sono state definite per vettori applicati nell'origine. Si eseguono in modo del tutto analogo per vettori applicati in un generico punto P: dati $(P, \mathbf{v}_1)$ e $(P, \mathbf{v}_2)$, $(P, \mathbf{v}_3)$ il prodotto scalare è $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ mentre il prodotto vettoriale è $(P, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)$. Il prodotto misto è $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$.

Figura 1.8: La terna di vettori v_1, v_2 e v_3 è orientata positivamente



Diciamo infine che spesso (e quasi sempre nella letteratura anglosassone) il prodotto vettoriale si indica col simbolo "$\times$", $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ invece di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

1.7 Rotazione degli assi e dei vettori

In questo paragrafo studiamo come cambiano le componenti di un medesimo vettore quando si fanno ruotare gli assi cartesiani e, viceversa, quando gli assi cartesiani sono fissati ma si fa ruotare un vettore.

1.7.1 Rotazione degli assi coordinati

Sia $\mathbb{R}^3$ riferito alla terna ordinata dei *versori* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ applicati nell'origine O e presi in quest'ordine: ossia $\mathbf{i}$ è il versore del primo asse, $\mathbf{j}$ quello del secondo e $\mathbf{k}$ quello del terzo.

In questo modo abbiamo assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e quindi anche un'orientazione in $\mathbb{R}^3$.

Siano $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, presi in quest'ordine, altri tre *versori* (applicati nell'origine O) *due a due ortogonali*. Ogni vettore

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \tag{1.20}$$

si può rappresentare anche con riferimento alla terna ordinata dei vettori $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$:

$$\mathbf{v} = a'\mathbf{i}' + b'\mathbf{j}' + c'\mathbf{k}' \,. \tag{1.21}$$

Vogliamo trovare una relazione tra i (coefficienti delle) componenti di v rispetto all'una ed all'altra terna. E'

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}' = a' \,, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' = b' \,, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}' = c' \,.$$

moltiplicando per $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ e $\mathbf{k}'$ la (1.20) si trova

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} .$$

La matrice

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

si chiama la MATRICE DI ROTAZIONE DELLE COORDINATE ORTOGONALI, ed ha delle proprietà particolari. Prima di tutto ricordiamo che i vettori delle due basi hanno norma 1 e quindi i prodotto scalari sono niente altro che i coseni degli angoli che essi formano. Per esempio, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'$ è il coseno dell'angolo compreso tra la semiretta individuata da $\mathbf{i}$ e quella individuata da $\mathbf{i}'$. Inoltre, se sono note le coordinate a', b', c', le coordinate a, b, c si calcolano in modo analogo, moltiplicando la (1.21) per $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Si trova

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} .$$

Dunque, la matrice della *trasformazione inversa* è C^T, la trasposta della matrice C. Ossia vale

$$C^T C = C C^T = I\,, \qquad \text{e dunque} \qquad C^{-1} = C^T \ : \tag{1.23}$$

la matrice C è ortogonale. Questa uguaglianza è condizione *necessaria e sufficiente* perché una matrice C trasformi vettori ortogonali in vettori ortogonali. Si può provare infatti (si veda il Teorema 124):

Teorema 26 *Una matrice C trasforma vettori ortogonali in vettori ortogonali se e solo se è una matrice ortogonale.*

Ricordando che $\det C = \det C^T$ e usando il teorema di Binet si vede che se una matrice rappresenta un cambiamento di coordinate ortogonali, allora

$$(\det C)^2 = 1 \qquad \text{e quindi} \qquad \det C = \pm 1\,.$$

Notando (da (1.22)) che gli elementi di C sono i (coefficienti delle) componenti dei versori $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ e $\mathbf{k}'$ calcolate nella prima base e ricordando il significato del determinante di una matrice 3×3 come volume (con segno) di un parallelepipedo, si vede che la terna $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ è orientata positivamente[6] se e solo se $\det C = +1$. Dunque, se la terna di assi coordinati è realizzata con tre rette saldate insieme in modo rigido, le rotazioni possono essere rappresentate solamente da quelle matrici ortogonali C che hanno determinante $+1$. Una matrice ortogonale con determinante -1 corrisponde ad una rotazione di assi uno dei quali incernierato al piano degli altri due, in modo da

[6] più propriamente, ORIENTATA IN MODO CONCORDE ALLA $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

poter ruotare rispetto a tale piano così da portare la semiretta positiva al posto di quella negativa. Ossia in questo caso oltre ad una rotazione si ha anche una SIMMETRIA rispetto ad un piano.

Le matrici ortogonali con determinante uguale a $+1$ sono particolarmente importanti perché si incontrano nella cinematica del corpo rigido e si chiamano MATRICI ORTOGONALI SPECIALI.

Di solito, parlando di "rotazione" si esclude il caso della simmetrizzazione di un asse rispetto ad un piano, ossia si intende parlare di rotazioni di un corpo rigido. In questo senso si considerano matrici di rotazioni le matrici ortogonali speciali. E quindi:

Corollario 27 *Se C_1 e C_2 sono matrici che rappresentano rotazioni, anche la matrice C_1C_2 rappresenta una rotazione.*

Precisiamo ora questo fatto: il termine "rotazione" fa pensare alla rotazione intorno ad un asse. Per esempio la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trasforma come segue:

$$\begin{array}{lcl} P_1(1,0,0) & \mapsto & P_1'(0,-1,0) \\ P_2(0,1,0) & \mapsto & P_2'(1,0,0) \\ P_3(0,0,1) & \mapsto & P_3'(0,0,1)\,. \end{array}$$

Dunque, l'azione di questa matrice si può pensare come una rotazione in senso orario intorno all'asse z. Il problema di capire se ogni rotazione è rotazione intorno ad un asse verrà chiarito nel paragrafo 2.10.2.

Osservazione 28 Si osservi che esistono matrici di determinante 1 che *NON sono matrici ortogonali.* ∎

Matrici ortogonali 2×2 e rotazioni del piano Una matrice ortogonale 2×2 verifica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} a^2+b^2 & = & 1 \\ c^2+d^2 & = & 1 \\ ac+bd & = & 0\,. \end{cases}$$

Dunque a e b sono seno e coseno di un medesimo angolo ϕ e c e d sono seno e coseno di un medesimo angolo ψ.

Scegliendo per esempio

$$\begin{cases} a &= \cos\phi\,, \qquad & b &= \sin\phi \\ c &= \sin\psi\,, \qquad & d &= \cos\psi \end{cases}$$

La terza condizione diviene

$$0 = ac + bd = \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi = \sin(\phi+\psi)\,.$$

Questa uguaglianza si verifica in due casi:

caso 1: $\psi = 2k\pi - \phi$ In questo caso

$$\psi = 2k\pi - \phi \quad \text{implica} \quad \begin{cases} c &= -\sin\phi \\ d &= \cos\phi\,. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

e si trova una matrice ortogonale speciale, quindi una matrice che rappresenta la rotazione di un corpo rigido.

caso 2: $\psi = 2k\pi - \phi + \pi$ In questo caso

$$\psi = 2k\pi - \phi + \pi \quad \text{implica} \quad \begin{cases} c &= \sin\phi \\ d &= -\cos\phi\,. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice ortogonale ha determinante -1 e quindi non rappresenta la rotazione di un corpo rigido.

Rotazione di un vettore in un fissato sistema di riferimento Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e siano $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ due vettori. Si dice che $\mathbf{w}$ è ottenuto ruotando $\mathbf{v}$ quando esiste una rotazione degli assi coordinati che trasforma in (a, b, c) le componenti (x, y, z) di $\mathbf{v}$ ossia quando esiste una matrice ortogonale C tale che

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Dunque, *una matrice ortogonale speciale rappresenta anche la rotazione dei vettori rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale.*

1.7.2 Rotazioni applicate successivamente

Si è visto che applicando successivamente due traslazioni, il vettore che si ottiene non dipende dall'ordine; analogamente per un vettore fissato: traslando successivamente gli assi coordinati la rappresentazione del fissato vettore non dipende dall'ordine in cui le traslazioni sono applicate. *Mostriamo che tale proprietà di commutatività non vale per le rotazioni.* Consideriamo le due rotazioni degli assi coordinati rappresentate dalle due matrici

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ambedue le matrici sono matrici ortogonali speciali e quindi rappresentano la rotazione di un corpo rigido. Come si è visto, la prima matrice si interpreta come rotazione di angolo $\pi/2$ intorno all'asse delle quote e in modo analogo la seconda si interpreta come rotazione di angolo $\pi/2$ intorno all'asse delle ascisse.

Risulta:

$$C_1C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In ambedue i casi il prodotto delle due matrici ortogonali speciali è ancora una matrice ortogonale speciale, in accordo col Corollario 27, ma le due rotazioni risultanti sono diverse: la rotazione ottenuta dipende dall'ordine nel quale C_1 e C_2 vengono applicate.

Se invece che lavorare in $\mathbb{R}^3$ si lavora in $\mathbb{R}^2$, la situazione è diversa: *tutte le matrici ortogonali speciali* 2×2 *commutano.* Infatti:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque, tutte le rotazioni (rigide) del piano commutano.

Invece non commutano matrici ortogonali una almeno con determinante -1, ossia non si ha commutazione se si fa intervenire una simmetria. Infatti si hanno i due casi seguenti:

prodotto di matrici con determinante di segno opposto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta-\phi) & \sin(\theta-\phi) \\ \sin(\theta-\phi) & -\cos(\theta-\phi) \end{bmatrix} \\ \neq \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ \sin\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

prodotto di matrici ambedue con determinante -1

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta-\phi) & \sin(\theta-\phi) \\ -\sin(\theta-\phi) & \cos(\theta-\phi) \end{bmatrix}$$
$$\neq \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi-\theta) & \sin(\phi-\theta) \\ -\sin(\phi-\theta) & \cos(\phi-\theta) \end{bmatrix}$$

1.7.3 Rotazione di coordinate e prodotto scalare e vettoriale

Sia C la matrice di una cambiamento di coordinate ortogonale. Calcolando il prodotto scalare dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in realtà si calcola il prodotto righe per colonne $(\mathbf{v})^T\mathbf{w}$, si ricordi l'osservazione **??**. Siano

$$\mathbf{v}' = C\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{w}' = C\mathbf{w}\,.$$

Si ha

$$(\mathbf{v}')^T\mathbf{w}' = (\mathbf{v})^T C^T C\mathbf{w}\,.$$

Se accade che C è una matrice ortogonale, allora $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, e si proverà (al paragrafo 2.10) che vale anche il viceversa:

Teorema 29 *Una matrice C è ortogonale se e solo se lascia invariato il valore del prodotto scalare.*

In particolare:

Corollario 30 *Norme e angoli non mutano sotto l'azione di matrici ortogonali.*

Si noti che esiste sempre una matrice ortogonale che riporta due generici vettori sul piano x, y. Ciò prova che l'interpretazione del prodotto scalare, come prodotto dei moduli dei vettori e del coseno dell'angolo compreso, vale per ogni coppia di vettori.

Lo studio del prodotto vettoriale richiede calcoli più lunghi e viene omesso. Limitiamoci ad illustrare il risultato.

Sia C una matrice ortogonale e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori rappresentati rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Calcolando esplicitamente $C(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ e $(C\mathbf{v}) \wedge (C\mathbf{w})$ si verifica il risultato seguente:

Teorema 31 *Si ha*

$$C(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\det C)\,\{(C\mathbf{v}) \wedge (C\mathbf{w})\}\ .$$

Quindi si ha

$$C(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (C\mathbf{v}) \wedge (C\mathbf{w})$$

quando C è una matrice ortogonale speciale.

La verifica di questo risultato richiede calcoli noiosi ma la ragione intuitiva si può capire esaminando un esempio. Consideriamo la matrice ortogonale

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice opera una simmetria dei vettori in questo modo: ne lascia invariata ascissa e quota mentre cambia segno all'ordinata. Dunque opera una simmetria rispetto al piano xz.

Consideriamo per esempio due vettori del piano xy, ambedue nel semipiano $y > 0$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. Supponiamo che sia $b < \beta$. In questo caso il vettore $\mathbf{v}$ si riporta sulla semiretta individuata da $\mathbf{w}$ *ruotandolo in senso antiorario, lo stesso senso di rotazione che riporta* $\mathbf{i}$ *su* $\mathbf{j}$ e quindi $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = c\mathbf{k}$ con $k > 0$ (infatti, $c = \beta - b$).

Consideriamo i vettori $C\mathbf{v} = \mathbf{i} - b\mathbf{k}$ e $C\mathbf{w} = \mathbf{i} - \beta\mathbf{k}$. Il vettore $C\mathbf{v}$ si riporta sulla semiretta individuata da $C\mathbf{w}$ *ruotandolo in senso orario* e quindi $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \tilde{c}\mathbf{k}$ ma questa volta con $\tilde{c} < 0$ e, precisamente, $\tilde{c} = -c$.

1.8 Coordinate curvilinee

Abbiamo rappresentato i punti dello spazio mediante le loro coordinate cartesiane, ottenendo una *corrispondenza biunivoca* tra punti e terne ordinate di numeri. Esistono altri modi di rappresentare mediante tre numeri i punti dello spazio, che tuttavia in generale non conducono ad una corrispondenza biunivoca.

Coordinate polari nel piano Vediamo prima di tutto l'uso delle COORDINATE POLARI per rappresentare i punti del piano xy che supponiamo rappresentato rispetto ad un fissato sistema di assi cartesiani ortogonali[7].

Sia P il punto da rappresentare. Si rappresenta P mediante la sua distanza da O e mediante l'angolo θ tra la retta r che esce dall'origine O e punta verso P e l'asse delle ascisse. L'angolo si sceglie col segno in questo modo: si orienta la retta r da O verso P; si riporta la direzione positiva dell'asse delle ascisse sulla direzione positiva di r, ruotando dell'angolo minore. L'angolo θ così ottenuto si intende positivo se la rotazione è antioraria.

In questo modo ogni punto del piano $z = 0$ si identifica mediante la coppia di numeri (ρ, θ) con $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. L'origine è identificata da $(0, \theta)$ per ogni θ e la corrispondenza tra il piano privato dell'origine e $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ è biunivoca. Si veda la figura 1.9. Il numero ρ si chiama il MODULO e θ si chiama L'ARGOMENTO o ANOMALIA di P.

[7] a stretto rigore, per introdurre le coordinate polari basta fissare O ed una semiretta uscente da O. La pratica comune è che O è l'origine di un sistema cartesiano ortogonale e la semiretta è il semiasse positivo delle ascisse. L'asse y non ha alcun ruolo.

Figura 1.9: Coordinate polari

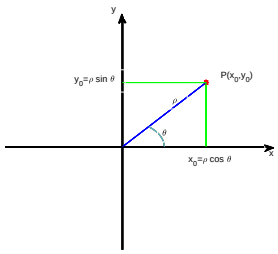


Figura 1.10: sinistra: coordinate cilindriche; destra: coordinate sferiche

Nel contesto delle coordinate polari, l'origine si chiama anche POLO.

La relazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari è data dalle FORMULE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE:

$$x = \rho \cos\theta\,, \qquad y = \rho \sin\theta\,.$$

Se si vuol sottolineare che il piano è il piano $z = 0$ allora si scrive esplicitamente $(\rho, \theta, 0)$.

Coordinate cilindriche nello spazio Rappresentiamo $\mathbb{R}^3$ rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale e sia $P \equiv (x, y, z)$ un punto dello spazio. Il punto $Q \equiv (x, y, 0)$ si chiama la PROIEZIONE di P sul piano $z = 0$. Il punto Q si può rappresentare mediante le sue coordinate polari (ρ, θ) e quindi P viene ad essere rappresentato mediante (ρ, θ, z). Quando si fa uso di questa rappresentazione si dice che si rappresenta lo spazio in COORDINATE CILINDRICHE, si veda la figura 1.10.

Coordinate sferiche nello spazio Ancora, fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in $\mathbb{R}^3$. Una seconda rappresentazione dei punti dello spazio R^3 è la seguente: si fissa un punto O e si costruisce la retta congiungente O con P. Si rappresenta P mediante (r, θ, ϕ) dove r è la distanza di P da O che ancora si chiama MODULO DI P; θ è l'argomento della proiezione Q di P sul piano $z = 0$, ϕ è l'angolo tra il versore ν che sulla retta da O a P punta verso P ed il versore $\mathbf{k}$. L'ampiezza di quest'angolo si intende compresa tra 0 e π.

Dunque, si veda la figura 1.10 a destra, P si rappresenta anche con la terna (r, θ, ϕ) con

$$r \geq 0\,, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi\,, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi\,.$$

Questi numeri si chiamano le COORDINATE SFERICHE di P. Le FORMULE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE sono le seguenti:

$$x = r\cos\theta\sin\phi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\,, \qquad z = r\cos\phi\,.$$

Come si è detto, numero r si chiama ancora MODULO. il numero θ si chiama LONGITUDINE mentre il numero ϕ si chiama COLATITUDINE.

Coordinate ellittiche nel piano In pratica si incontrano numerosi altri sistemi di coordinate curvilinee, che non tratteremo. Limitiamoci ad introdurre le sole COORDINATE ELLITTICHE nel piano. Le corrispondenza tra i punti del piano e le coppie (ρ, θ) (ancora non biunivoca) è data DALLE FORMULE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$x = a\rho\cos\theta\,, \qquad y = b\rho\sin\theta$$

con $a > 0$, $b > 0$ in generale diversi tra loro.

1.9 Rette per l'origine

Riprendiamo le considerazioni svolte al paragrafo 1.2.

Sia $\mathbf{v}_0$ un vettore di $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Abbiamo detto che esso si interpreta come la traslazione che porta in $P(v_1, v_2, v_3)$ un punto originariamente in O. Ai vettori

$$\mathbf{v} = t\mathbf{v}_0\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

corrispondono i punti di coordinate tv_1, tv_2 e tv_3. Questi punti sono tutti e soli i punti della retta per O e P. Dunque, le coordinate del generico punto $P(x, y, z)$ di questa retta per l'origine sono

$$x = tv_1\,, \quad y = tv_2\,, \quad z = tv_3\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.24}$$

Naturalmente non è restrittivo assumere $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. In questo caso i numeri v_1, v_2, v_3 si chiamano i COSENI DIRETTORI DELLA RETTA.

Osservazione 32 (Sulla notazione) Confondendo i vettori con i punti che essi identificano, ossia col loro secondo estremo, la (1.24) si scrive anche

$$P = t\mathbf{v}_0$$

però è bene sottolineare che spesso P indica un punto dello spazio mentre $\mathbf{v}_0$ indica un vettore spostamento: quello che sposta O in P. Per questa ragione usa dire che i punti $P(tv_1, tv_2, tv_3)$ sono punti della retta, mentre diremo che i vettori $t\mathbf{v}_0$ "giacciono" sulla retta. ∎

La (1.24) si chiama L'EQUAZIONE PARAMETRICA della retta, perché i punti della retta si ritrovano al variare del "parametro" $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che essa può interpretarsi anche dicendo che *la retta è l'immagine della trasformazione* $t \to t\mathbf{v}_0$ *da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}^3$.

La rappresentazione $P = t\mathbf{v}_0$, ossia scrivendo in componenti la (1.24), non è unica. Se $\alpha \neq 0$, la

$$P = \tau(\alpha\mathbf{v}_0) \qquad \tau \in \mathbb{R} \tag{1.25}$$

rappresenta la medesima retta. Le due rappresentazioni (1.24) e (1.25) si dicono ottenute l'una dall'altra mediante il cambiamento di parametro $t = \alpha t$. Ciò suggerisce di privilegiare una rappresentazione particolare: la rappresentazione

$$P = t\left(\frac{v_0}{\|v_0\|}\right)$$

ossia quella che rappresenta la retta mediante un versore.

Sottolineiamo che in queste considerazioni α *non deve prendere il valore eccezionale* 0. *Se* $\alpha = 0$ *la (1.25) rappresenta l'origine* O *degli assi coordinati.*

> Siano $t_1\mathbf{v}_0$, $t_2\mathbf{v}_0$ vettori che giacciono sulla retta. Ovviamente, $t\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 = (t_1 + t_2)\mathbf{v}_0$ è ancora un vettore che giace sulla stessa retta; e lo stesso accade moltiplicando $t\mathbf{v}_0$ per un numero α. Ossia, *operando con somme e moltiplicazioni per scalari sui vettori che giacciono sulla retta* per l'origine, *non si esce dalla retta.* Per questa ragione, una retta che passa da O si chiama anche un SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^3$ (di dimensione 1).

Se invece di far variare t in $\mathbb{R}$ si impone la condizione $t \in [a, b]$, si trova IL SEGMENTO di estremi $P(av_1, av_2, av_3)$ e $P(bv_1, bv_2, bv_3)$.

Notiamo i seguenti casi particolari:

1) se accade che una delle tre componenti di $\mathbf{v}$ è nulla la retta giace su uno dei piani coordinati. Per esempio, se $v_3 = 0$ la retta giace sul piano xy;

2) se $v_3 = 0$ e se, per esempio, $v_1 \neq 0$ allora le coordinate x ed y dei punti della retta che passa per O e per $P(v_1, v_2, 0)$ sono legate da

$$y = \frac{v_2}{v_1}x\,.$$

Si sa che il numero $m = v_2/v_1$ si chiama il "coefficiente angolare" o "pendenza" della retta del piano xy.

Direzione e verso su una retta

Abbiamo notato che la medesima retta r: $t\mathbf{v}_0$ per l'origine può identificarsi mediante $t(a\mathbf{v}_0)$ qualunque sia $a \neq 0$.

Ricordiamo che l'insieme dei vettori $\{a\mathbf{v}\,,\ a \neq 0\}$ identifica una direzione nello spazio, che è chiamiamo la DIREZIONE DELLA RETTA r.

Il parametro t appartiene ad $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{R}$ esiste una relazione di ordine. Tale ordine si trasferisce ad r come segue: siano P_1 e P_2 due punti della retta r, $P_1 = t_1\mathbf{v}_0$, $P_2 = t_2\mathbf{v}_0$. Diciamo che P_1 viene prima di P_2 se $t_1 < t_2$. Quando si stabilisce un ordine tra i punti di $\mathbf{r}$ si dice che si è definito un VERSO su r. I vettori $\{a\mathbf{v}_0\,,\ a > 0\}$ ed i vettori $\{a\mathbf{v}_0\,,\ a < 0\}$ identificano due versi su r, che si dicono opposti l'uno all'altro.

1.10 Piani per l'origine

Consideriamo ora due vettori, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, *non colineari,* ossia tali che

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \neq 0\,.$$

Consideriamo i vettori

$$\mathbf{u} = t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad \tau = \mathbb{R} \tag{1.26}$$

a cui corrispondono i punti di coordinate

$$x = tv_1 + \tau w_1\,, \quad y = tv_2 + \tau w_2\,, \quad z = tv_3 + \tau w_2\,. \tag{1.27}$$

Ricordiamo ora che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$ e quindi anche a $\mathbf{u}$. Dunque,

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

e quindi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono complanari. Si può anche mostrare il viceversa: *ogni vettore complanare con* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si ottiene dalla (1.26).* Infatti, $\mathbf{u}$ è sullo stesso piano di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$ se e solo se il parallelepipedo individuato da questi tre vettori ha volume nullo. Per questa ragione le (1.27) si chiamano LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DEL PIANO in $\mathbb{R}^3$. I punti del piano si ritovano al variare dei "parametri" t e τ in $\mathbb{R}$.

Si osservi che le coordinate dei punti del piano sono l'immagine di una trasformazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$: la trasformazione

$$\begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix} \longrightarrow (t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}.$$

Questa trasformazione ha proprietà alquanto particolari: *multipli e somme di vettori di un piano per l'origine appartengono al medesimo piano,* si veda la (1.26). Per questa ragione i piani *per l'origine si chiamano anche i* SOTTOSPAZI *di* $\mathbb{R}^3$ *(di dimensione* 2*).*

Osservazione 33 Un'espressione del tipo

$$t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w} \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ \tau \in \mathbb{R}$$

si chiama COMBINAZIONE INEARE dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

La combinazione lineare di due vettori si può sempre scrivere, anche se i due vettori sono colineari. In questo caso si ritrova però l'equazione di una retta ed uno dei due parametri è ridondante. ∎

Così come nel caso della retta, il piano di equazione parametrica (1.26) si può rappresentare anche con l'equazione

$$u = t(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) + \tau(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = (at + \alpha\tau)\mathbf{v} + (bt + \beta\tau)\mathbf{w} \tag{1.28}$$

funzione dei due parametri

$$r = (at + \alpha\tau)\,, \qquad s = (bt + \beta\tau) \tag{1.29}$$

Però, come nel caso della retta, si incontrano dei casi "eccezionali". Prima di tutto è chiaro che se $a = \alpha = b = \beta = 0$ la (1.28) rappresenta solo l'origine. Nel caso del piano è però necessario anche che i due parametri r ed s siano indipendenti, ossia che il sistema (1.29) sia risolubile per ogni r e per ogni s. Ciò avviene se e solo se il determinante

$$a\beta - b\alpha \neq 0\,.$$

Se $a\beta - b\alpha = 0$ la (1.28) rappresenta l'equazione di una retta che giace sul piano (1.26), salvo nel caso in cui tutti i coefficienti sono nulli, caso nel quale, come si è detto, si trova la sola origine delle coordinate.

Così come nel caso della retta, si può trovare una rappresentazione privilegiata per il piano (1.26). Rappresentiamo il piano mediante l'equazione

$$\mathbf{u} = t\mathbf{v} + \tau\left(\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\right)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad \tau = \mathbb{R}$$

Il vantaggio di questa rappresentazione è che il piano è rappresentato per mezzo di due vettori tra loro ortogonali:

$$\mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right) = 0 \,.$$

Un ulteriore passo porta a scrivere l'equazione del piano nella forma

$$\mathbf{u} = t\mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_2 \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 & = & = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ \mathbf{e}_2 & = & \frac{1}{\|\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\|} \left\{ \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \right\} . \end{cases}$$

I due vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono due versori, ossia hanno norma 1, e sono tra loro ortogonale. La coppia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ si chiama una BASE ORTONORMALE DEL PIANO.

1.10.1 Equazione cartesiana del piano per l'origine

Torniamo a considerare le equazioni parametriche (1.27). Per ipotesi, i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono colineari, ossia il loro prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *non è nullo.* Dunque è non nulla una delle sue componenti. Sia per esempio non nulla la terza componente di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$:

$$v_1 w_2 - w_1 v_2 \neq 0 \,.$$

Si sa, dal Teorema 2, che sotto questa condizione il sistema di due equazioni lineari

$$x = tv_1 + \tau w_1 \,, \quad y = tv_2 + \tau w_2$$

nelle incognite t e τ ammette una soluzione (unica) per ciascuna scelta del "termine noto" x, y. Dunque, esistono numeri r_i ed s_i, $i = 1, 2$, indipendenti da x e da y, tali che

$$t = r_1 x + s_1 y \,, \qquad \tau = r_2 x + s_2 y \,.$$

Sostituendo queste espressioni per t e τ in $z = tv_3 + \tau w_3$ si trova che le coordinate x, y, z dei punti del piano (ricordiamo, passante per l'origine) sono legate da un'equazione della forma

$$ax + by + cz = 0 \,, \tag{1.30}$$

con a, b, c opportuni coefficienti *non tutti nulli.*

Viceversa si vede immediatamente che se x, y, z soddisfano (1.30) (con coefficienti non tutti nulli) allora esse sono le coordinate dei punti del piano le cui equazioni parametriche sono

$$x = t \,, \qquad y = \tau \,, \qquad z = -\frac{1}{c}[at + b\tau]$$

(se $c \neq 0$. Si studi per esercizio il caso $c = 0$). Dunque, ogni piano passante per l'origine è rappresentato anche da un'equazione della forma (1.30), che si chiama EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO (per l'origine).

La (1.30) ha una semplice interpretazione geometrica. Si introduca il vettore

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}\,.$$

La (1.30) si scrive

$$\mathbf{n} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0\,.$$

Ossia, il piano per l'origine descritto dalla (1.30) è caratterizzato come l'insieme dei vettori ortogonali alla direzione $\mathbf{n}$.

Osservazione 34 E' ovvio che l'equazione cartesiana del piano non è unica: la (1.30) equivale a $s(ax + by + cz) = 0$ per $s \neq 0$. Ossia, il vettore $\mathbf{n}$ normale al piano non è unico. E' però unico, a meno del segno, il *versore* ortogonale al piano. E dunque è unica l'equazione

$$ax + by + cz = 0$$

che descrive un piano dato, se si impone l'ulteriore condizione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\,. \quad \blacksquare$$

Si è detto che l'insieme delle combinazioni lineari $t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$ descrive un piano se i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono colineari, altrimenti descrive una retta (ed uno dei due parametri è ridondante). Consideriamo ora tre vettori e le loro combinazioni lineari

$$t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} + t_3\mathbf{w}\,, \qquad t_i \in \mathbb{R}\,.$$

Se i tre vettori *non* sono complanari, ogni altro vettore dello spazio può ottenersi mediante una opportuna scelta dei numeri t_i, si veda il paragrafo 1.1.2; se i vettori sono complanari, ossia se per esempio $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, si ritrovano i punti di un piano (ed uno dei tre parametri t_i è ridondante). Se i tre vettori sono colineari si trovano i punti di una retta.
In generale in $\mathbb{R}^n$ si chiamano *combinazioni lineari* dei vettori $\mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq k$, le somme

$$\sum_{i=1}^{k} t_i\mathbf{v}_i\,, \qquad t_i \in \mathbb{R}\,.$$

L'insieme $\mathcal{S}$ delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_i$ ha ancora la proprietà:

$$\mathbf{v} \in \mathcal{S} \implies t\mathbf{v} \in \mathcal{S} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad \mathbf{v} \in \mathcal{S}\,,\ \mathbf{w} \in \mathcal{S} \implies \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{S}$$

(la verifica è immediata). Per questo $\mathcal{S}$ si chiama ancora un SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^n$. Il problema di capire se lo stesso sottospazio $\mathcal{S}$ si possa descrivere usando solo una parte dei vettori $\mathbf{v}_i$ è alquanto delicato e verrà ripreso in seguito.

1.11 Rette e piani generici

Se un vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ applicato nell'origine viene traslato parallelamente a sé stesso applicandolo al punto $P(x_0, y_0, z_0)$, si viene ad identificare il punto $Q(x_0 + v_1, y_0 + v_2, z_0 + v_3)$. Dunque, la retta per $P(x_0, y_0, z_0)$ parallela alla retta $t\mathbf{v}$, passante per l'origine, è la retta di EQUAZIONE PARAMETRICA

$$x = x_0 + tv_1\,, \qquad y = y_0 + tv_2\,, \qquad z = z_0 + tv_3\,. \tag{1.31}$$

Usano una notazione già vista quando la retta passa per l'origine, la (1.31) si scrive anche

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,.$$

DIREZIONE e VERSO possono definirsi su una generica retta: direzione e verso della (1.31) sono quelli di

$$x = tv_1\,, \qquad y = tv_2\,, \qquad z = tv_3$$

ossia sono quelli della sua parallela per l'origine.

Analogamente traslando per parallelismo i vettori del piano

$$x = tv_1 + \tau w_1\,, \qquad y = tv_2 + \tau w_2\,, \qquad z = tv_3 + \tau w_3$$

fino ad applicarli in $P(x_0, y_0, z_0)$ si trova il piano per P parallelo al precedente, la cui EQUAZIONE PARAMETRICA è

$$x = x_0 + tv_1 + \tau w_1\,, \qquad y = y_0 + tv_2 + \tau w_2\,, \qquad z = z_0 + tv_3 + \tau w_3\,. \tag{1.32}$$

Risolvendo, per esempio, le prime due equazioni in (1.32) rispetto a t e τ si trova

$$t = r_1(x - x_0) + s_1(y - y_0)\,, \qquad \tau = r_2(x - x_0) + s_2(y - y_0)\,.$$

Sostituendo nella terza si trova un'equazione che lega le tre coordinate x, y e z dei punti del piano:

$$z - z_0 = v_3[r_1(x - x_0) + s_1(y - y_0)] + w_3[r_2(x - x_0) + s_2(y - y_0)]\,,$$

che si scrive più comunemente, rinominando i coeficienti, nella forma

$$ax + by + cz = d$$

ove naturalmente $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Si chiama questa L'EQUAZIONE CARTESIANA del piano.

Si noti che il piano non muta moltiplicando tutti i coefficienti della sua equazione per uno stesso numero *non nullo.* Dunque ad un piano corrispondono infinite equazioni cartesiane diverse, i cui coefficienti differiscono per una costante. Inoltre, per il modo stesso con cui l'equazione è stata costruita,

Teorema 35 *Sia $\gamma \neq 0$ e si considerino le due equazioni*

$$\begin{aligned} &ax + by + cz = d_0\,, \quad d_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ &\gamma ax + \gamma by + \gamma cz = \gamma d_1\,, \quad d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1\,. \end{aligned}$$

Le due equazioni rappresentano piani tra loro paralleli, passanti il primo per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed il secondo per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

In particolare, i due piani

$$ax + by + cz = d\,, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

(con coefficienti non tutti nulli) sono paralleli se e solo se

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$$

(in queste uguaglianze si intende che se un denominatore è nullo allora è nullo anche il corrispondente numeratore).

Osservazione 36 Si è notato che

$$ax + by + cz = 0$$

è il piano per l'origine ortogonale al vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Usa dire che questo vettore è ortogonale anche ai piani $ax + by + cz = d_0$ con $d_0 \neq 0$. Va notato però che $\mathbf{n}$ *NON* è ortogonale ai vettori $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ che verificano $ax + by + cz = d_0$. E' vero invece che $\mathbf{n}$ *applicato in un punto P del piano* è ortogonale ai vettori *applicati in P e che giacciono sul piano.* ∎

Notiamo infine che l'insieme di tutti i piani passanti per il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ è dato da

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

al variare dei coefficienti a, b, c. Quest'insieme di piani si chiama la STELLA DI PIANI per P.

1.11.1 Casi particolari dell'equazione del piano

Studiamo casi particolari dell'equazione

$$ax + by + cz = d\,.$$

Si sa già che $d = 0$ si ha quando il piano passa per l'origine.

Sia $a = 0$. L'equazione diviene

$$by + cz = d\,.$$

Se l'equazione è soddisfatta da (x_0, y_0, z_0) allora è anche soddisfatta da (x, y_0, z_0) per ogni x. Dunque il piano contiene (infinite) rette parallele all'asse x: il piano stesso è parallelo all'asse x (e passa per l'asse x se $d = 0$).

Gli altri casi particolari si trattano in modo analogo. I risultati sono riassunti nello specchietto seguente:

$d = 0$	piano per l'origine
$a = 0$	piano parallelo all'asse x
$b = 0$	piano parallelo all'asse y
$c = 0$	piano parallelo all'asse z
$a = 0$ e $b = 0$	piano parallelo al piano xy
$a = 0$ e $c = 0$	piano parallelo al piano xz
$b = 0$ e $c = 0$	piano parallelo al piano yz
$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $d \neq 0$	nessun punto soddisfa l'equazione
$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 0$	ogni punto di $\mathbb{R}^3$ soddisfa all'equazione

Dunque, gli ultimi due casi non corrispondono ad equazioni di piani.

Supponiamo ora che i quattro coefficienti siano tutti non nulli:

$$a \neq 0\,, \qquad b \neq 0\,, \qquad c \neq 0\,, \qquad d \neq 0\,.$$

Dividendo per d e cambiando nome ai coefficienti, l'equazione del piano si scrive

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

che si chiama EQUAZIONE SEGMENTARIA DEL PIANO per questa ragione: il punto di intersezione tra il piano e l'asse x si ottiene risolvendo

$$\begin{cases} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ed è quindi il punto $(p, 0, 0)$. Analogamente si trovano i punti di intersezione con gli altri assi: i numeri p, q, r identificano i segmenti che il piano "stacca" sugli assi.

Infine diciamo che si chiama EQUAZIONE CANONICA del piano l'equazione

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

Il significato di quest'equazione verrà illustrato in seguito. Per ora notiamo che i coefficienti sono i coseni direttori del vettore normale al piano e quindi esistono tre angoli, θ_1, θ_2, θ_3 per cui

$$\cos\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \qquad \cos\theta_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \qquad \cos\theta_3 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

e quindi l'equazione canonica di un piano può sempre scriversi nella forma

$$x\cos\theta_1 + y\cos\theta_2 + z\cos\theta_3 = \tilde{d}\,,$$

per un opportuno numero $\tilde{d}$.

1.11.2 La retta come intersezione di piani

Torniamo a considerare l'equazione parametrica di una generica retta,

$$x = x_0 + tv_1\,, \qquad y = y_0 + tv_2\,, \qquad z = z_0 + tv_3\,. \tag{1.33}$$

Uno almeno dei numeri v_i è non nullo. Sia per esempio $v_1 \neq 0$. In questo caso $t = (x - x_0)/v_1$. Sostituendo nelle altre due relazioni si vede che le coordinate dei punti della retta verificano

$$y = y_0 + \frac{v_2}{v_1}(x - x_0)\,, \qquad z = z_0 + \frac{v_3}{v_1}(x - x_0)\,. \tag{1.34}$$

Viceversa, se x, y, z verificano ambedue queste relazioni, la (1.33) vale con $t = (x - x_0)/v_1$.

Le due equazioni in (1.34) sono equazioni di due piani e quindi *ogni retta può rappresentarsi come intersezione di due piani.*

Vale anche il vicevera:

Teorema 37 *Dati due piani* non paralleli *la loro intersezione è una retta.*

<u>Dim</u>. Siano

$$a_0x + b_0y + c_0z = d_0\,, \qquad a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

i due piani. Per ipotesi questi non sono paralleli e quindi non sono colineari i vettori ad essi normali

$$a_0\mathbf{i} + b_0\mathbf{j} + c_0\mathbf{k}\,, \qquad a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}\,.$$

Dunque, dal Teorema 3, vale *almeno una* delle disuguaglianze seguenti

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Se per esempio vale la seconda allora è risolubile il sistema

$$\begin{cases} a_0x + c_0z &= d_0 - b_0y \\ a_1x + c_1z &= d_1 - b_1y\,. \end{cases}$$

Risolvendo si trova un'uguaglianza del tipo

$$x = r_0 + s_0y\,, \qquad z = r_1 + s_1y \tag{1.35}$$

per certe scelte dei coefficienti r_i ed s_i, si veda il teorema 2. La (1.35) è l'equazione parametrica di una retta (se si vuole, si aggiunga alle due relazioni in (1.35) l'ulteriore relazione $y = t$). ∎

In certi casi è necessario seguire il procedimento inverso: data una retta r, scrivere le equazioni di tutti i piani che la contengono. L'insieme di tali piani si chiama il

FASCIO DI PIANI PER LA RETTA r. Ciò è immediato se la retta è data come intersezione di piani,

$$r : \qquad \begin{cases} a_0x + b_0y + c_0x &= d_0 \\ a_1x + b_1y + c_1x &= d_1 \,. \end{cases} \tag{1.36}$$

In questo caso ogni piano di equazione

$$\alpha[a_0x + b_0y + c_0x - d_0] + \beta[a_1x + b_1y + c_1x - d_1] = 0 \tag{1.37}$$

contiene tutti i punti della retta e, viceversa, al variare di α e β la (1.37) dà *tutti* i piani per r. Infatti, un qualsiasi piano per r si trova imponendo al piano di passare per r e per un punto P *non* di r; e c'è un solo piano con queste proprietà. Si vede immediatamente che fissato P uno dei piani in (1.37) passa per P; e quindi ogni piano per r appartiene al fascio (1.37). Dunque:

Teorema 38 *Data la retta r in (1.36), il fascio di piani per essa è l'insieme dei piani di equazione (1.37) al variare di α e β in $\mathbb{R}$, con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.*

Osservazione 39 La (1.37) può anche scriversi se i piani sono paralleli, e quindi non si intersecano. Se i due piani coincidono allora per ogni α e β (non ambedue nulli) si trova sempre lo stesso piano; altrimenti si trovano tutti i piani paralleli ai due dati, che peraltro si ottengono più semplicemente scrivendo

$$a_0x + b_0y + c_0z = d\,, \qquad d \in \mathbb{R}\,.$$

Si chiama questo il FASCIO DI PIANI PARALLELI a quello dato. ∎

1.11.3 Retta per due punti e piano per tre punti

Siano $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x_1, y_1, z_1)$ due punti non coincidenti. Il vettore

$$\mathbf{v}_1 = (x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}$$

applicato in P identifica il segmento da P a Q. Dunque la retta per i due punti P e Q ha equazione parametrica

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)\,, \qquad y = x_0 + t(y_1 - y_0)\,, \qquad z = z_0 + t(z_1 - z_0)\,. \tag{1.38}$$

Si noti un altro modo per arrivare a questa equazione: sia P un generico punto dello spazio. Il segmento $P - P_0$ è parallelo al segmento $Q - P_0$ se

$$(P - P_0) \wedge (Q - P_0) = 0\,.$$

Imponendo che siano nulle le tre componenti del prodotto vettoriale si trovano le tre uguaglianze[8]

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\,.$$

Chiamando t il valore comune ai tre rapporti si ritrova la (1.38).

In modo analogo si trova l'equazione del piano per tre punti

$$P_0(x_0,y_0,z_0)\,,\qquad P_1(x_1,y_1,z_1)\,,\qquad P_2(x_2,y_2,z_2)\,.$$

Un generico punto $P(x,y,z)$ è sul piano per i tre punti se è nullo il volume del parallelepipedo dei tre vettori

$$P-P_0\,,\qquad P_1-P_0\,,\qquad P_2-P_0\,;$$

e quindi se

$$(P-P_0)\cdot\Big((P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\Big)=\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0\,.$$

1.11.4 Rette parallele, complanari e sghembe

Due rette che si incontrano appartengono sempre ad un medesimo piano, ossia sono complanari. Infatti, sia $P_0(x_0,y_0,z_0)$ il punto di intersezione e siano $P_1(x_1,y_1,z_1)$ un punto della prima retta, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ uno della seconda. Se P è un ulteriore punto della prima retta allora $P-P_0=t(P_1-P_0)$ per un certo valore di t e quindi verifica

$$0=[t(P_1-P_0)]\cdot\Big((P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\Big)$$

perché

$$(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\perp(P_1-P_0)\,.$$

Dunque, il vettore $P-P_0$ *applicato in* P_0 è sul piano individuato dai vettori P_1-P_0, P_2-P_1 *applicati in* P_0.

Lo stesso vale per i punti della seconda retta.

Osservazione 40 Si noti che abbiamo anche trovato un metodo per scrivere l'equazione del piano per due rette incidenti come piano che passa per P_0, loro punto di intersezione e per due punti P_1 sulla prima e P_2 sulla seconda retta. ∎

[8] se uno dei denominatori si annulla si intende che anche il corrispondente numeratore debba essere nullo.

Anche due rette parallele sono complanari. Infatti, siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ sulla prima retta e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sulla seconda. Ogni punto $P(x, y, z)$ della seconda retta si rappresenta come

$$P = P_2 + t(P_1 - P_0)$$

e quindi appartiene al piano per P_0, P_1 e P_2. Infatti, $P - P_2$ è parallelo a $P_1 - P_0$ così che

$$(P - P_2) \cdot \Big((P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) \Big) = 0\,.$$

Osservazione 41 E ancora, si è dato un modo per trovare il piano contenente due rette parallele. ∎

Non ci sono altri casi di rette complanari perché su un piano due rette non parallele si incontrano sempre.

Due rette non complanari si chiamano SGHEMBE

1.11.5 Alcuni problemi relativi al calcolo di elementi geometrici

In questo paragrafo risolviamo alcuni problemi che si incontrano frequentemente.

Divisione di un segmento in parti proporzionali Si consideri il segmento $t\mathbf{v}$, $t \in [a, b]$, di estremi $P_1 = P(av_1, av_2, av_3)$ e $P_2 = P(bv_1, bv_2, bv_3)$. Vogliamo identificare un punto Q del segmento le cui distanze rispettivamente da P_1 e da P_2 abbiano rapporto k.

La distanza da P_1 di $Q(tv_1, tv_2, tv_3)$ è

$$\|t\mathbf{v} - a\mathbf{v}\| = (t - a)\|\mathbf{v}\|\,.$$

Analogamente, la distanza da P_2 è $(b - t)\|\mathbf{v}\|$. Dunque, il punto Q ha la proprietà richiesta se

$$\frac{t - a}{b - t} = k \qquad \text{ossia} \qquad t = \frac{a + kb}{1 + k}\,.$$

Sia $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Le ascisse di P_1, Q e P_2 sono rispettivamente

$$x_{P_1} = av_1\,, \qquad x_Q = \frac{a + kb}{1 + k}v_1\,, \qquad x_{P_2} = bv_1$$

e quindi si ha anche

$$\frac{x_Q - x_{P_1}}{x_{P_2} - x_Q} = k\,.$$

Lo stesso dicasi per l'ordinata e la quota. Si noti che quest'affermazione è niente altro che l'espressione del *Teorema di Talete.*

I piani ortogonali ad una data retta r Questo problema va inteso come segue: si voglioni i piani che intersecano la retta r in un suo generico punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e si vuole che i vettori applicati in P_0 e giacenti sulla retta siano ortogonali ai vettori applicati in P_0 e giacenti sul piano. Questo problema si risolve più facilmente rappresentando la retta in forma parametrica,

$$x = x_0 + tv_1\,, \qquad y = y_0 + tv_2\,, \qquad z = z_0 + tv_3\,. \tag{1.39}$$

Il piano perpendicolare alla retta e passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$$

ossia

$$v_1x + v_2y + v_3z = d_0 = v_1x_0 + v_2y_0 + v_3z_0\,.$$

L'insieme di tutti i piani richiesti si ottiene facendo variare il punto P_0 sulla retta o, equivalentemente, facendo variare il piano trovato parallelamente a sé stesso; ossia facendo variare arbitrariamente il termine noto. Dunque, il fascio dei piani perpendicolari alla retta r è

$$v_1x + v_2y + v_3z = d \qquad d \in \mathbb{R}\,.$$

Le rette ortogonali ad un piano E' dato un piano

$$ax + by + cz = d\,.$$

Si vogliono tutte le rette ad esso perpendicolari, e quindi, al variare di $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (appartenente o no al piano), la perpendicolare al piano che passa per $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Come sopra, la retta è perpendicolare al piano quando accade questo: se P_0 è il punto di intersezione tra la retta ed il piano, i vettori del piano applicati in P_0 sono ortogonali ai vettori della retta, ancora applicati in P_0.

Naturalmente, una retta perpendicolare ad un piano è perpendicolare anche a tutti i piani ad esso paralleli; e quindi non è restrittivo assumere che il piano passi per l'origine, ossia che $d = 0$. In tal caso, $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ è perpendicolare al piano e la retta

$$x = at\,, \quad y = bt\,, \quad z = ct$$

è la retta perpendicolare al piano per l'origine. Ogni altra retta si ottiene traslando questa parallelamente a se stessa. Dunque la retta perpendicolare al piano per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ha equazione

$$x = at + x_1\,, \quad y = bt + y_1\,, \quad z = ct + z_1\,.$$

Piano per una retta e parallelo ad un vettore Si dice che UN PIANO È PARALLELO AD UN VETTORE quando esso contiene una retta che è parallela al vettore. Ossia, se $\mathbf{w}$ è il vettore e $\mathbf{v} \cdot (P - P_0)$ è l'equazione del piano si vuole che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Siano assegnate una retta r ed un vettore $\mathbf{w}$. Si vuole l'equazione del piano per r che è parallelo a $\mathbf{w}$.

Si noti che questo problema ha senso solo se $\mathbf{w}$ non è parallelo alla retta, altrimenti qualunque piano per la retta è a sua volta parallelo a $\mathbf{w}$.

Consideriamo separatamente il caso in cui la retta è assegnata in modo parametrico da quello in cui è assegnata come intersezione di piani.

Retta assegnata con l'equazione parametrica Sia

$$\begin{array}{l} r: \quad P = P_0 + t\mathbf{v} \\ \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \neq 0\,. \end{array}$$

Il piano richiesto contiene sia la retta r che la retta $\mathbf{r}_1$: $P = P_0 + \tau\mathbf{w}$ e quindi ha equazione parametrica

$$P = P_0 + t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}\,.$$

Retta assegnata come intersezione di piani In questo caso

$$r\,; \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot (P - P_0) = 0 \\ \mathbf{v}_2 \cdot (P - P_0) = 0 \end{cases}$$

Questa equazione deve rappresentare effettivamente una retta e quindi $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono complanari.

Il piano richiesto è uno dei piani del fascio per la retta e quindi ha equazione

$$(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) \cdot (P - P_0) = 0\,.$$

Per una opportuna scelta del punto P del piano, deve essere $P - P_0 = \mathbf{w}$ e quindi deve valere

$$(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = 0\,.$$

Uno almeno dei due prodotti $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}$ oppure $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$ è non nullo perchè i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono complanari. Dunque quest'equazione identifica λ/μ oppure μ/λ e quindi il piano richiesto del fascio.

La retta che interseca ortogonalmente due rette sghembe Le due rette siano assegnate parametricamente:

$$r_1 = P_1 + t\mathbf{v}_1\,, \qquad r_2 = P_2 + \tau\mathbf{v}_2\,.$$

La condizione che esse non siano parallele à che

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \neq 0\,.$$

Il piano per r_1 e parallelo a $\mathbf{w}$ è ortogonale ad r_2 e quindi la incontra ortogonalmente in un punto Q_2; Il piano per r_2 e parallelo a $\mathbf{w}$ è perpendicolare ad r_1 e la incontra ortogonalmente in un punto Q_1. L'intersezione dei due piani è una retta che incontra perpendicolarmente r_1 in Q_1 ed r_2 in Q_2.

Come si è visto:

piano per r_1 e parallelo a $\mathbf{w}$:	$P = P_1 + t\mathbf{v}_1 + \tau\mathbf{w}$
piano per r_2 e parallelo a $\mathbf{w}$:	$P = P_2 + t\mathbf{v}_2 + \tau\mathbf{w}$

La retta cercata è intersezione di questi due piani e quindi ha equazione

$$\begin{cases} P = P_1 + t\mathbf{v}_1 + \tau\mathbf{w} \\ P = P_2 + t\mathbf{v}_2 + \tau\mathbf{w}\,. \end{cases}$$

L'insieme dei piani che *non* intersecano una retta Sia r la retta in (1.39). Uno qualsiasi che non la inerseca si ottiene prendendo un piano del fascio di piani per r e spostandolo parallelamente a sé stesso[9].

Per trovare questi piani procediamo in tre passi:

1. prima scriviamo la retta come intersezione di due piani, ossia scriviamola nella forma (1.34);

2. poi scriviamo l'equazione del fascio di piani per la retta. Questa è l'equazione (1.37) che riscriviamo con le notazioni in (1.34): l'equazione del fascio di piani è[10]

$$(x - x_0)\left[\alpha\frac{v_2}{v_1} + \beta\frac{v_3}{v_1}\right] - \alpha(y - y_0) - \beta(z - z_0) = 0$$

   al variare di α e β in $\mathbb{R}$.

3. I piani che *non* intersecano la retta si ottengono traslando uno qualsiasi di questi per parallelismo, lungo la sua normale, ossia imponendo che il membro destro sia non nullo:

$$(x - x_0)\left[\alpha\frac{v_2}{v_1} + \beta\frac{v_3}{v_1}\right] - \alpha(y - y_0) - \beta(z - z_0) = d \qquad \forall d \in \mathbb{R}\,, \quad d \neq 0$$

al variare di α, β e γ in $\mathbb{R}$, con $\gamma \neq 0$.

[9] si intende che lo spostamento non è uno scivolamento sul piano stesso, ossia che ha componente non nulla lungo la perpendicolare al piano.

[10] si svolge il calcolo nel caso $v_1 \neq 0$.

1.12 La geometria analitica piana

La geometria analitica piana si dà per nota e su questa non insistiamo. Notiamo però che la geometria analitica sul piano xy può ottenersi da quanto detto nello spazio imponendo $z = 0$ (e, come si usa, non indicando più la terza coordinata). Limitiamoci a precisare che

$$ax + by = c \tag{1.40}$$

è la generica equazione di una retta del piano xy. Essa è ortogonale alla direzione del vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

Se $a^2 + b^2 = 1$ allora $\mathbf{v}$ è il versore ortogonale alla retta; l'equazione della retta si chiama in questo caso EQUAZIONE CANONICA e, come si è detto, i coefficienti si chiamano i COSENI DIRETTORI.

Se la retta non passa per l'origine, ossia se $c \neq 0$, dividendo per c essa si scrive nella forma

$$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y = 1$$

che si chiama la EQUAZIONE SEGMENTARIA DELLA RETTA. I numeri p e q sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata dei punti nei quali la retta interseca gli assi coordinati.

Infine, definiamo i fasci di rette: il FASCIO DELLE RETTE PARALLELE alla (1.40) è l'insieme delle rette parallele ad essa, ossia l'insieme delle rette

$$ax + by = d\,, \qquad d \in \mathbb{R}\,.$$

Dato invece un punto $P(x_0, y_0)$ il FASCIO DI RETTE PER IL PUNTO $P(x_0, y_0)$ è l'insieme di tutte le rette che passano per P e quindi è l'insieme di tutte le rette

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad a \in \mathbb{R}\,, \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

1.13 Calcolo di proiezioni, distanze ed angoli

Abbiamo già incontrato le proiezioni di un vettore sugli assi coordinati. Il calcolo di proiezioni su rette o piani generici è un problema che studiamo ora.

Scomposizione di un vettore Siano $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{w}$ due vettori applicati nell'origine. Fissiamo l'attenzione su $\mathbf{v}_0$, che supponiamo *di modulo* 1*;* ossia supponiamo che $\mathbf{v}_0$ sia un *versore.* Il versore $\mathbf{v}_0$ individua la retta

$$r : \qquad P = t\mathbf{v}_0 \,.$$

Si chiama PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\mathbf{w}$ SULLA RETTA r o anche COMPONENTE DI $\mathbf{w}$ PARALLELA A $\mathbf{v}_0$ il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_0)\mathbf{v}_0 \,.$$

Il vettore $\mathbf{u}_0$ si chiama "proiezione ortogonale" perché si verifica facilmente che

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_0)\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{v} \,.$$

Si noti che

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$$

e quindi *ogni vettore si* DECOMPONE *nella somma della sua proiezione ortogonale sulla retta r e di un vettore perpendicolare alla retta stessa.* Questa decomposizione è unica.

La rappresentazione della retta r non è unica: si ottiene le medesima retta se $\mathbf{v}$ è sostituito da $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}$ con $\alpha \neq 0$. In questo caso la proiezione ortogonale è espressa dalla formula

$$\mathbf{u}_0 = ([\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \,.$$

Infatti si verifica facilmente che

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w} - [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \perp \mathbf{v}_1$$

e quindi $\mathbf{u}_1$ è perpendicolare alla retta r. Dunque, assegnata la retta r per l'origine, la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su r, e la corrispondente decomposizione di $\mathbf{w}$, sono uniche: non dipendono dalla rappresentazione scelta per $\mathbf{r}$.

Proiezione ortogonale di un punto su una retta Sia ora r una retta generica

$$r : \qquad P_0 + t\mathbf{v} \qquad \text{per semplicità sia } \|\mathbf{v}\| = 1 \,.$$

Indichiamo con $P_{\mathbf{w}}$ il punto di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta il vettore $\mathbf{w}$, ossia tale che[11]

$$\mathbf{w} = P_{\mathbf{w}} - O \,.$$

[11] ricordiamo che la notazione $P - Q$ rappresenta sempre un vettore applicato in O.

La PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\mathbf{w}$ SULLA RETTA r è quel punto $Q \in r$ tale che

$$P_{\mathbf{w}} - Q \perp (P - Q) \qquad \forall P \in r\,. \tag{1.41}$$

Essendo P e Q in r essi sono rappresentati da

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,, \qquad Q = P_0 + T_Q\mathbf{v}\,, \qquad P_{\mathbf{w}} - Q = (P_{\mathbf{w}} - P_0) - T_Q\mathbf{v}\,.$$

Il numero t è qualsiasi mentre T_Q è da determinare.

La relazione di ortogonalità (1.41) si scrive

$$[((P_{\mathbf{w}} - P_0) - T_Q\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}]\,(t - t_Q) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e quindi} \quad T_Q = (P_{\mathbf{w}} - P_0)\,\mathbf{v}\,.$$

Dunque la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ sulla retta r è

$$P_0 + [(P_{\mathbf{w}} - P_0) \cdot \mathbf{v}]\,\mathbf{v}$$

Si verifichi che la proiezione dipende solo dalla retta r e non dal particolare punto P_0 o dal particolare vettore $\mathbf{v}$ usati per rappresentarla.

E' immediato vedere un'ovvia relazione col calcolo delle distanze: la DISTANZA DEL PUNTO $P_{\mathbf{w}}$ DA r è

$$\|P_{\mathbf{w}} - Q\|\,.$$

Questo numero è la minima delle distanze tra $P_{\mathbf{w}}$ e i punti della retta.

Un caso di particolare interesse è il caso in cui $P_{\mathbf{w}} = 0$. La proiezione di O sulla retta è

$$P_0 - (P_0 \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}$$

Proiezione ortogonale di un punto su un piano Calcoliamo ora la proiezione ortogonale di un punto su un piano. Consideriamo i due casi in cui il piano è rappresentato parametricamente ed il caso in cui è rappresentato in forma cartesiana.

Il caso del piano rappresentato parametricamente Sia π il piano passante per P_0 e contenente i due *versori* $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Ricordiamo che l'equazione parametrica del piano è

$$P = P_0 + t\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{e}_2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ \tau \in \mathbb{R}\,.$$

Sia $P_{\mathbf{w}} = O + \mathbf{w}$. La PROIEZIONE ORTOGONALE DI $P_{\mathbf{w}}$ SUL PIANO π è quel punto $Q \in \pi$, ossia $Q = P_0 + t_Q\mathbf{e}_1 + \tau_Q\mathbf{e}_2$, tale che

$$P_{\mathbf{w}} - Q \perp (P - Q) \qquad \forall P \in \pi$$

ossia

$$[(P - P_0) - (t_Q\mathbf{e}_1 + \tau_Q\mathbf{e}_2)] \perp [(t - t_Q)\mathbf{e}_1 + (\tau - \tau_Q)\mathbf{e}_2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,\ \tau \in \mathbb{R}\,.]$$

Dunque,

$$t_Q = (P - P_0) \cdot \mathbf{e}_1 \,, \quad \tau_Q = (P - P_0) \cdot \mathbf{e}_2 \,,$$
$$Q = P_0 + ((P - P_0) \cdot \mathbf{e}_1)\, \mathbf{e}_1 + ((P - P_0) \cdot \mathbf{e}_2)\, \mathbf{e}_2 \,.$$

Si verifica facilmente che il punto Q non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica scelta per il piano.

Il numero $\|P_{\mathbf{w}} - Q\|$ è la DISTANZA DEL PUNTO DAL PIANO. Essa è la minima tra le distanze di $P_{\mathbf{w}}$ dai punti del piano.

Il caso del piano in forma cartesiana Sia

$$\pi : \qquad \mathbf{n} \cdot (P - P_0) = 0 \,.$$

La proiezione ortogonale del punto P_1 sul piano è quel punto Q del piano tale che

$$P_1 - Q \perp Q - P \qquad \forall P \in \pi \,.$$

Allora, $P_1 - Q$ è parallelo ad $\mathbf{n}$,

$$Q = P_1 + t\mathbf{n} \,.$$

Imponiamo che Q appartenga al piano, ossia che

$$0 = \mathbf{n} \cdot (P_1 + t\mathbf{n} - P_0) = \mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0) + t|\mathbf{n}|^2 \,.$$

Dunque

$$Q = P_1 - \frac{\mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0)}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} \,. \tag{1.42}$$

La distanza di P_1 dal piano π è $\|P_1 - Q\|$ e quindi è

$$\|Q - P_1\| = \frac{|(P_1 - P_0) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \,. \tag{1.43}$$

Sia ora $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. L'equazione del piano assume forma

$$ax + by + cz = d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \mathbf{n} \cdot P_0 \,.$$

e la formula (1.43) per la distanza diviene

$$|P_1 \cdot n - d| \,.$$

Sia in particolare $P_1 = O$. Allora, *quando il piano è rappresentato in forma canonica,* la distanza di O dal piano è $|d|$ (e si vede anche che $d > 0$ quando $Q - O$ ha lo stesso verso di $\mathbf{n}$. Altrimenti $c < 0$.)[12].

[12] Un risultato analogo vale nel piano: se $ax + by = c$ è l'equazione di una retta e se $a^2 + b^2 = 1$, il numero $|c|$ è la distanza dell'origine dalla retta.

Distanza tra due piani paralleli La distanza di due piani paralleli è la lunghezza del segmento che essi staccano su una perpendicolare comune.

Siano

$$\begin{aligned} \pi \ : \qquad & \mathbf{n} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = d \\ \pi_1 \ : \qquad & \mathbf{n} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = d_1 \end{aligned}$$

con $d \neq d_1$ le equazioni dei due piani. La retta per l'origine ortogonale ad essi è

$$P = P - O = t\mathbf{n}\,.$$

Le sue intersezioni con i piani si trovano per t rispettivamente uguale a

$$\frac{d}{\|\mathbf{n}\|^2}\,, \qquad \frac{d_1}{\|\mathbf{n}\|^2}\,.$$

La distanza tra i due piani è quindi

$$\frac{|d - d_1|}{\|\mathbf{n}\|}\,. \tag{1.44}$$

In particolare, se i due piani paralleli sono rappresentati in forma canonica, ossia se $\|n\| = 1$, *la distanza fra essi è il valore assoluto della differenza dei termini noti delle rispettive equazioni.*

Distanza tra una retta e un piano ad essa parallelo La distanza è uguale alla distanza tra il piano dato e quello ad esso parallelo e passante per la retta; equivalentemente, è la distanza tra un punto della retta e il piano.

Siano

$$\pi \ : \quad \mathbf{n} \cdot (P - P_0) = 0\,, \quad r \ : \quad P = Q + t\mathbf{v}\,, \qquad \|\mathbf{n}\| = 1\,, \quad \|\mathbf{v}\| = 1$$

La retta è parallela al piano e quindi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Si scelga un punto della retta, per esempio il punto Q. La sua distanza da π è

$$|(Q - P_0) \cdot \mathbf{n}| \qquad \text{(si ricordi che } \|\mathbf{n}\| = 1\,.$$

si veda la formula (1.43).

Se si vuol seguire l'altra via, si considera il piano per r parallelo a π, che è

$$\pi' : \quad \mathbf{n} \cdot (P - Q) = 0$$

e si calcola la distanza tra i due piani. Dalla (1.44) si trova che la distanza è

$$|\mathbf{n} \cdot (P_0 - Q)|\,.$$

Distanza tra due rette parallele o sghembe Calcoliamo ora la distanza tra due rette distinguendo il caso delle rette parallele dal caso delle rette sghembe

Distanza tra rette parallele Due rette parallele sono complanari: la distanza tra esse si calcola quindi come nel caso piano: la loro distanza è la lunghezza del segmento che esse staccano su una perpendicolare che le interseca. Se

$$r : \quad P = P_0 + t\mathbf{v}\,, \qquad r_1 : \quad P = P_1 + t\mathbf{v}$$

il piano

$$\mathbf{v} \cdot (P - P_0) = 0$$

è ortogonale alle due rette e taglia la prima in P_0. L'intersezione con la seconda è data da

$$0 = \mathbf{v} \cdot (P_1 + t\mathbf{v} - P_o) \qquad \text{e quindi} \qquad t = -\frac{\mathbf{v} \cdot (P_1 - P_0)}{|\mathbf{v}|^2}\,.$$

Il segmento per i punti

$$P_0 \qquad \text{e} \qquad Q = P_1 - \left[\frac{\mathbf{v} \cdot (P_1 - P_0)}{|\mathbf{v}|^2}\right]\mathbf{v}$$

è ortogonale alle due rette. Dunque la distanza tra le due rette (ricordiamo, parallele) è

$$\left|(P_0 - P_1) + \frac{[\mathbf{v} \cdot (P_1 - P_0)]\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right|\,.$$

Distanza tra due rette sghembe Le equazioni parametriche delle due rette siano

$$r_1 : \quad P = P_0 1 + t\mathbf{v}_1\,, \qquad r_2 : \quad P = P_2 + t\mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_1 \neq 0\,.$$

Ricordiamo che $\mathbf{w} \neq 0$ perché le due rette non sono parallele e che esiste una unica retta s che le interseca perpendicolarmente. Questa retta è intersezione del piano π_1 per r_1 e parallelo a $\mathbf{w}$ e del piano π_2 per r_2 e parallelo a $\mathbf{w}$. Sia Q_1 il punto in cui s interseca r_1 e sia Q_2 quello in cui interseca r_2. Per definizione la DISTAMZA TRA LE DUE RETTE SGHEMBE è la lunghezza del segmento $[Q_1, Q_2]$.

Il segmento $[Q_1, Q_2]$ è la proiezione ortogonale di $[P_1, P_2]$ lungo una retta per P_1 e parallela a $\mathbf{w}$ (o lungo la parallela a zbw per P_2). Dunque, la distanza tra le due rette sghembe è

$$\left|(P_1 - P_0) \cdot \left[\frac{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\|}\right]\right|\,.$$

Angoli tra rette e tra rette e piani Abbiamo già definito l'angolo θ tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, applicati nel medesimo punto P. L'angolo tra due rette passanti per il medesimo punto,

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,, \qquad P = P_0 + t\mathbf{w}$$

è per definizione quello tra i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati in P_0 e quindi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}\,, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,.$$

Conviene estendere questa definizione. Se

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,, \qquad P = P_1 + t\mathbf{w}\,,$$

definiamo ancora

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,|\mathbf{w}\|}\,, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,.$$

anche se le due rette non si incontrano. In particolare, *l'angolo tra due rette parallele è* 0.

Siano r una retta e π un piano. Rappresentiamo il piano in forma cartesiana ed r in forma parametrica:

$$\pi\ :\ \mathbf{n}\cdot(P - P_0)\,, \qquad r\ :\ P = P_1 + t\mathbf{v}\,.$$

Traslazioni per parallelismo non cambiano gli angoli e quindi si può supporre $P_0 = P_1 = O$.

Si ignorano i versi di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{n}$ così che l'angolo tra le due direzioni di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{n}$ è dato da (si veda la (1.18))

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}\,, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

L'angolo tra la retta ed il piano è il complemento a π di θ. Dunque l'angolo tra la retta ed il piano è l'angolo ϕ tale che

$$\sin\phi = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{v}\|}\,, \quad 0 \le \phi \le \pi/2\,.$$

1.14 Circonferenze nello spazio

Così come una retta nello spazio può rappresentarsi come intersezione di due piani, una circonferenza nello spazio può rappresentarsi come intersezione di un piano e di una sfera (e questo non è l'unico modo: si può anche rappresentare come intersezione di due sfere, ma naturalmente è più semplice rappresentarla come intersezione di una sfera e di un piano).

Sia

$$S: \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

l'equazione di una sfera e sia

$$ax+by+cz=d$$

l'equazione di un piano. Supponiamo per semplicità che il piano sia scritto in forma canonica, ossia con

$$a^2+b^2+c^2=1\,.$$

La distanza d_1 del piano dal centro $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ della sfera è[13]

$$d_1=|n\cdot P_0-d|\,,$$

si veda la (1.43). L'intersezione è vuota se $d_1>R$, si riduce ad un solo punto se $d_1=R$ ed è una circonferenza se $0\le d_1<R$.

Si pongono ora due problemi: quello di trovare l'equazione cartesiana di una circonferenza assegnata nello spazio e viceversa quello di descrivere geometricamente la circonferenza di cui è assegnata l'equazione cartesiana.

Una circonferenza si assegna, per esempio, specificando il piano su cui giace, il centro ed il raggio. Il piano su cui giace si assegna per esempio specificandone la normale $\mathbf{n}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. Se $Q(x_1,y_1,z_1)$ è il centro della circonferenza allora il piano su cui la circonferenza giace è

$$\mathbf{n}\cdot[(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}]=a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\,.$$

La sfera può scegliersi in infiniti modi. La scelta più semplice è la sfera di centro e raggio uguali a quelli della circonferenza; e quindi l'equazione cartesiana della circonferenza è

$$\begin{cases} a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2\end{cases}$$

ove R è il raggio della circonferenza.

Viceversa, siano assegnati un piano (in forma canonica) e una sfera. Vogliamo capire se la loro intersezione definisce una circonferenza, ed identificarne centro e raggio (il piano su cui la circonferenza giace essendo già dato). Si consideri quindi il sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=d\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\,.\end{cases}$$

Si è già notato che se

$$d_1=|n\cdot P_0-d|>R\,,\qquad P_0=P_0-O=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$$

allora l'intersezione è vuota.

[13] si intende $\mathbf{n}\cdot P_0=\mathbf{n}\cdot(P_0-O)$.

Se

$$d_1 = |n \cdot P_0 - d| = R$$

l'intersezione si riduce ad un punto, e si dice che il piano è TANGENTE[14] alla sfera. Il punto di intersezione è il piede della perpendicolare condotta al piano dal centro della sfera. Esso si determina usando la (1.42).

Se invece

$$d_1 = |n \cdot P_0 - d| < R$$

allora l'intersezione è effettivamente una circonferenza. Il centro della circonferenza è il piede della perpendicolare condotta dal centro della sfera sul piano. Il raggio della circonferenza è

$$r = \sqrt{R^2 - d_1^2}\,.$$

1.15 Superfici e curve generiche

Abbiamo studiato i piani e le rette, che sono particolari "curve" e "superfici" descritte mediante *equazioni di primo grado.* Abbiamo visto però anche che circonferenze e sfere sono descritte da *equazioni di secondo grado;* e si sa che certe equazioni di secondo grado nelle incognite x ed y descrivono ellissi, parabole e iperboli. Lo studio delle generiche curve e superfici sarà oggetto del corso successivo di Analisi matematica. Qui ci limitiamo a presentare alcune definizioni semplificate.

Chiamiamo SUPERFICIE espressa in forma parametrica l'insieme dei punti (x, y, z) dati da

$$x = f(u, v)\,, \qquad y = g(u, v)\,, \qquad z = h(u, v)$$

con (u, v) che appartiene ad una "regione" del piano[15]. Le ipotesi che facciamo sulle funzioni f, g ed h sono nel paragrafo 1.15.1.

Una *superficie* può anche esprimersi in forma CARTESIANA. Si intende dire con ciò che è espressa da una relazione del tipo

$$g(x, y, z) = 0$$

ove g soddisfa alle condizioni che specificheremo nel paragrafo 1.15.1.

Definiamo ora le curve nello spazio. Per CURVA espressa in forma parametrica si intende l'insieme dei punti $P(x, y, z)$ con

$$x = f(t)\,, \qquad y = g(t)\,, \qquad z = h(t) \qquad \text{ossia} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$$

ove t è un parametro reale che varia in un intervallo.

Le condizioni che imporremo alle tre funzioni f, g ed h sono al Par. 1.15.1.

[14] è questo un caso particolare della definizione di piano tangente che si vedrà al paragrafo 1.15.1.

[15] una "regione" del piano è un insieme aperto che non si rappresenta come unione di due aperti disgiunti; sono regioni per esempio i dischi o i rettangoli privati della frontiera.

Quando accade che $\mathbf{v}(t)$ appartiene ad un piano π per ogni valore di t la curva si chiama PIANA. Ciò avviene quando esiste un vettore $\mathbf{n}$ tale che

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \qquad \forall t\,.$$

Un caso particolarmente importante si ha quando la curva appartiene ad uno dei piani coordinati, per esempio al piano xy. In questo caso $h(t) \equiv 0$ e la curva si studia sul piano xy, ossia senza esplicitamente indicare la terza coordinata che è nulla.

Si noti che spesso una curva è data in coordinate polari, se piana, cilindriche o sferiche, o di altro tipo se nello spazio. Per esempio

$$\rho = \theta\,, \qquad \theta > 0$$

è la SPIRALE D'ARCHIMEDE.indexspirale d'Archimede In coordinate cartesiane essa si esprime come

$$x = \theta \cos\theta\,, \qquad y = \theta \sin\theta\,;$$

La curva

$$\rho = r\,, \qquad \theta = t\,, \qquad z = t\,,$$

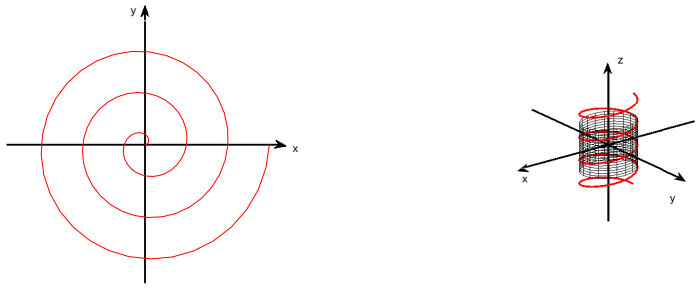
data in coordinate cilindriche, è UN'ELICA CILINDRICA. La sua espressione in coordinate cartesiane è

$$x = r\cos t\,, \qquad y = r\sin t\,, \qquad z = t\,.$$

Le due curve sono rappresentate nella figura 1.11.

La spirale descritta si dice "di Archimede" perché inizialmente da lui studiata (va detto che esistono numerose altre spirali); l'elica cilindrica ha questo nome perché si avvolge su un cilindro circolare retto.

Figura 1.11: Sinistra: spirale di Archimede; destra: elica cilindrica



Si osservi che anche le curve piane possono essere date in FORMA CARTESIANA, per esempio la circonferenza è data da

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Invece, le curve nello spazio possono anche rappresentarsi come INTERSEZIONE DI SUPERFICI:

$$f(x, y, z) = 0 , \qquad g(x, y, z) = 0, .$$

Osservazione 42 Si è detto che le definizioni precedenti andrebbero moltissimo precisate. E' facile rendersi conto di ciò considerando alcuni esempi:

L'equazione $P = t\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}$ vuol essere l'equazione di una superficie (precisamente di un piano). Se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ invece si trova una retta, ossia una curva, e uno dei parametri è ridondante.

Le equazioni $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ vogliono essere le equazioni di una curva (precisamente, di una retta). Se però $a = b = c = 0$ si trova solamente un punto.

Le ulteriori condizioni che imporremo alle funzioni che definiscono le curve e le superfici intendono ovviare a queste difficoltà.

Infine notiamo che anche le definizioni di curva e superficie in forma cartesiana hanno dei problemi. Per esempio, l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

descrive una sfera se $c > 0$; il solo punto $(0, 0, 0)$ se $c = 0$; nessun punto la risolve se $c < 0$. Si osservi però che se $c < 0$ esistono soluzioni se si accettano valori complessi delle variabili. ∎

Infine diciamo che per indicare una curva o una superficie useremo lettere greche.

1.15.1 Tangenti e piani tangenti

Sia γ una curva data in forma parametrica,

$$\gamma : \qquad \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) .$$

Se le tre funzioni sono derivabili, la prima formula degli incrementi finiti applicata a ciascuna coordinata permette di scrivere

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{v}'(t_0) + \mathsf{o}(t - t_0) .$$

Si *definisce* RETTA TANGENTE a γ nel suo punto $\mathbf{v}(t_0)$ quella di equazione parametrica

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{v}'(t_0) .$$

Però, perché questa equazione sia effettivamente quella di una retta dovremo supporre $\mathbf{v}'(t_0) \neq 0$. Dunque, alla funzione $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ che rappresenta una curva in forma parametrica imponiamo le seguenti condizioni:

1. le tra funzioni f, g ed h sono continue e derivabili salvo un numero finito di punti;
2. le funzioni $f'(t)$, $g'(t)$ ed $h'(t)$ possono annullarsi contemporaneamente al più in un numero finito di punti.

I punti in cui le derivate esistono ed una almeno è non nulla sono i PUNTI REGOLARI. Gli altri sono PUNTI SINGOLARI. Per definizione, i punti singolari sono in numero finito.

Prima di considerare le curve piane in forma cartesiana, introduciamo la definizione di derivata parziale.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili. Si fissi un arbitrario valore di y e si consideri la funzione $x \mapsto f(x, y)$. Questa è una funzione di una sola variabile. Se è derivabile, la sua derivata si chiama la DERIVATA PARZIALE di f rispetto ad x e si indica con uno dei due simboli

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,, \qquad f_x(x,y)\,, \quad f_{,1}(x,y)$$

ove $_{,1}$ (si noti la virgola, che non va omessa!) indica che si sta derivando rispetto alla prima variabile[16]

Si noti che la derivata parziale dipende da ambedue le variabili. Se si vuol precisare che la derivata si calcola nel punto (x_0, y_0) si scrive $f_x(x_0, y_0)$.

In modo analogo si definisce (e si indica) la derivata rispetto alla seconda vartiabile y ed è ovvio come estendere la definizione al caso di più variabili.

Nel caso di una funzione di *una* variabile, l'esistenza della derivata *in un punto* implica la continuità della funzione in tale punto. L'asserto analogo *è falso* per le funzioni di più variabili: l'esistenza di $f_x(x_0, y_0)$ e di $f_y(x_0, y_0)$ *non implica la continuità di f in (x_0, y_0)*. E' però vero il risultato seguente, che verrà provato nel successivo corso di Analisi Matematica:

Teorema 43 *Se le derivate parziali $f_x(x, y)$ ed $f_y(x, y)$ esistono e sono continue*[17] *in ciascun punto di un disco del piano, la funzione $f(x, y)$ è ivi continua ; se le derivate parziali $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ ed $f_z(x, y, z)$ esistono e sono continue in ciascun punto di una palla nello spazio, la funzione $f(x, y)$ è ivi continua.*

Per dire che una funzione di più variabili ha tutte le derivate parziali continue su una regione si diche che è ivi di classe C^1.

Consideriamo ora una curva γ *piana e data in forma cartesiana*

$$\gamma : \qquad f(x, y) = 0\,.$$

Alla funzione $f(x, y)$ imponiamo le seguenti condizioni:

[16] questa notazione è particolarmente utile quando la derivata si deve integrare e quando si cambiano le variabili di integrazione.

[17] la continuità di una funzione di più variabili è un'estensione ovvia della definizione nota per funzioni di una variabile: $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0) quando per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ allora $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$.

1. ambedue le derivate parziali di $f(x, y)$ siano continue salvo un numero finito di punti;

2. Ancora salvo un numero finito di punti, sia diversa da zero almeno una delle due derivate parziali.

I punti in cui le derivate parziali o non esistono o non sono continue, *se appartengono alla curva* sono i PUNTI SINGOLARI. Gli altri sono i PUNTI REGOLARI.

Esclusi i punti singolari, si prova (nel successivo corso di Analisi Matematica) che esiste la tangente alla curva nel punto $P(x_0, y_0)$ e questa ha equazione cartesiana

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0\,.$$

Per esempio, sia

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 = r^2\,, \qquad r > 0\,.$$

Si ha

$$f_x(x, y) = 2ax\,, \qquad f_y(x, y) = 2by\,.$$

e le due derivate parziali si annullano contemporaneamente solo in O. Il punto O non appartiene alla curva, che è una circonferenza centrata in O e quindi non ne è un punto singolare.

La tangente in $P(x_0, y_0)$ è

$$ax_0(x - x_0) + by_0(y - y_0) = 0$$

ed esiste in ogni punto.

Consideriamo invece l'equazione cartesiana $xy = 0$ Quest'equazione rappresenta la curva costituita dai due assi coordinati. Le due derivate si annullano in O, che è un punto della curva, e quindi ne è un punto singolare.

Sia ora Σ una superficie,

$$\Sigma : \qquad \begin{cases} x &= x(r, s) \\ y &= y(r, s) \\ z &= z(r, s) \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(r, s)\,.$$

Sia γ una curva (piana) appartenente al dominio in cui varia la coppia (r, s),

$$\gamma : \qquad \begin{cases} r &= r(t) \\ s &= s(t)\,. \end{cases}$$

L'immagine della curva piana γ sulla superficie è

$$\gamma_1 : \qquad \begin{cases} x &= x(t) &= x(r(t), s(t)) \\ y &= y(t) &= y(r(t), s(t)) \\ z &= z(t) &= z(r(t), s(t))\,. \end{cases}$$

Fissiamo un punto della superficie

$$P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)\,, \qquad x_0 = x(r(t_0), s(t_0))\,, \quad y_0 = y(r(t_0), s(t_0))\,, \quad z_0 = y(r(t_0), s(t_0))\,.$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità vale lo sviluppo di Taylor[18]

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_0) + \left[x_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + x_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0) + \mathsf{o}(\mathsf{t} - \mathsf{t_0}) \\
y(t) &= y(t_0) + \left[y_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + y_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0) + \mathsf{o}(\mathsf{t} - \mathsf{t_0}) \\
z(t) &= z(t_0) + \left[z_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + z_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0) + \mathsf{o}(\mathsf{t} - \mathsf{t_0})\,.
\end{aligned}$$

La tangente a γ_1 in P_0 è quindi la retta di equazione parametrica

$$\begin{aligned}
x &= x(r(t_0), s(t_0)) + \left[x_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + x_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0) \\
y &= y(r(t_0), s(t_0)) + \left[y_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + y_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0) \\
z &= z(r(t_0), s(t_0)) + \left[z_r(r(t_0), s(t_0))r'(t_0) + z_s(r(t_0), s(t_0))s'(t_0)\right](t - t_0)\,.
\end{aligned}$$

Fissato quindi il punto P_0 sulla superficie, si trova una famiglia di rette tangenti, una per ciascuna curva per P_0. Queste rette appartengono tutte al piano di equazione parametrica

$$\begin{cases}
x = x(r(t_0, s(t_0)) + [x_r(r(t_0), s(t_0))u + x_s(r(t_0), s(t_0))v] \\
y = y(r(t_0), s(t_0)) + [y_r(r(t_0), s(t_0))u + y_s(r(t_0), s(t_0))v] \\
z = z(r(t_0), s(t_0)) + [z_r(r(t_0), s(t_0))u + z_s(r(t_0), s(t_0))v]\ .
\end{cases} \tag{1.45}$$

Il piano (1.45) si chiama PIANO TANGENTE alla superficie. Però attenzione: la (1.45) potrebbe non rappresentare un piano: se tutte le derivate parziali sono nulle il piano collassa in un punto; e se i due vettori $x_r\mathbf{i} + y_r\mathbf{j} + z_r\mathbf{k}$ e $x_s\mathbf{i} + y_s\mathbf{j} + z_s\mathbf{k}$ sono colineari il piano collassa in una retta. Le condizioni che imponiamo escludono queste possibilità. Richiediamo:

1. le funzioni $x(r, s)$, $y(r, s)$, $z(r, s)$ sono definite su una regione e sono ivi di classe C^1;

2. si ha
   $\mathbf{n}(r, s) = (x_r(r, s)\mathbf{i} + y_r(r, s)\mathbf{j} + z_r(r, s)\mathbf{k}) \wedge (x_s(r, s)\mathbf{i} + y_s(r, s)\mathbf{j} + z_s(r, s)\mathbf{k}) \neq 0.$

   Il vettore $n(r, s)$ è per definizione la NORMALE ALLA SUPERFICIE nel punto $P(x(r, s), y(r, s), z(r, s))$.

[18] Lo sviluppo di Taylor scritto vale quando tutte le derivate parziali *sono continue*. Si noti che la formula di Taylor scritta è l'analogo della prima formula degli incrementi finiti per funzioni di una sola variabile. Per funzioni di una sola variabile essa vale se esiste la derivata nel punto. Invece, per funzioni di due o più variabili, la formula vale se *tutte le derivate parziali esistono e sono continue in ogni punto di un disco di centro* $(r(t_0), s(t_0))$.

In pratica può accadere che queste condizioni non valgano in punti isolati o lungo un numero finito di curve, che sono luoghi di PUNTI SINGOLARI DELLA SUPERFICIE.indexpunto!singolare!di una superficie parametrica

Se la superficie è data in forma cartesiana,

$$f(x, y, z) = 0\,,$$

vale un risultato analogo a quello visto per le curve: se $P(x_0, y_0, z_0)$ è un punto della superficie nel quale *almeno una* delle derivate parziali è non nulla, il piano tangente in $P(x_0, y_0, z_0)$ è

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \qquad (1.46)$$

e la normale alla superficie nel punto $P(x_0, y_0, z_0)$ è

$$\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}\,.$$

Per le superfici in forma cartesiana si assume:

1. la funzione $f(x, y, z)$ è di classe C^1;
2. almeno una delle derivate parziali è non nulla.

In pratica può accadere che queste condizioni non valgano in punti isolati o lungo un numero finito di curve che sono luoghi di PUNTI SINGOLARI DELLA SUPERFICIE. Gli altri sono i PUNTI REGOLARI.

Notiamo infine che una funzione $f(x, y)$ delle tre variabili (x, y, z) definisce una superficie con questa proprietà: se $f(x_0, y_0) = 0$ allora la retta verticale (x_0, y_0, z) giace sulla superficie. Superfici con questa proprietà si chiamano CILINDRI VERTICALI.

Consideriamo il cilindro di equazione cartesiana

$$xy = 0\,.$$

Questo è il diedro costituito dai due piani coordinati per l'asse z. L'asse z è il luogo dei suoi punti singolari.

1.15.2 Cilindri

Sia γ una curva e $\mathbf{v}$ un vettore. L'insieme dei punti delle rette che incontrano γ e che sono parallele a $\mathbf{v}$ si chiama CILINDRO. La curva γ si dice una DIRETTRICE del cilindro mentre le rette si chiamano GENERATRICI.

Se

$$\gamma : \quad P = \mathbf{f}(t) \qquad t \in [a, b]$$

allora il cilindro ha equazione

$$P = \mathbf{f}(t) + s\mathbf{v} \qquad t \in [a, b]\,, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

Si vede quindi che il cilindro è una superficie, secondo la definizione presentata al paragrafo 1.15.

E' importante esaminare il caso particolare in cui $\mathbf{v}$ giace su un asse coordinato. Consideriamo per esempio il caso $\mathbf{v} = \mathbf{k}$. In questo caso le equazioni parametriche del cilindro, scritte in coordinate, sono

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t) + s \qquad t \in [a, b]\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

e si vede che per ogni scelta di s la coordinata z può assumere un valore qualsiasi. Quindi, scegliendo $r = z(t) + s$ come parametro, il cilindro si rappresenta come

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = r \qquad t \in [a, b]\,, \quad r \in \mathbb{R}$$

o anche

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad \forall z\,.$$

Se una delle equazioni per x o per y può risolversi rispetto a t, per esempio se vale

$$t = t(y)\,,$$

allora il cilindro *con generatrici parallele all'asse* z, si può rappresentare come

$$x = x(t(y)) \qquad \forall z\,.$$

Viceversa, relazioni del tipo

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall z$$

rappresentano cilindri con generatrici parallele all'asse z e passanti per la curva $f(x, y) = 0$ del piano xy.

Osservazione 44 Si faccia attenzione alla notazione. per indicare un cilindro con generatrici parallele all'asse z in genere *NON* si scrive

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall z\,.$$

Si scrive semplicemente

$$f(x, y) = 0$$

intendendo questa come un'equazione in *tre* variabili, che non dipende dalla terza variabile z e quindi non ne vincola il valore. ∎

Considerazioni analoghe si possono ripetere per cilindri con generatrici parallele agli altri assi.

1.15.3 Coni

Sia ancora γ una curva e sia P_0 un punto. Si chiama CONO DI VERTICE P_0 e DIRETTRICE γ la superficie descritta dalle rette che escono da P_0 e che passano per i punti di γ. Tali rette si chiamano le GENERATRICI del cono.

Anche il cono è una superficie secondo la definizione del paragrafo 1.15. Infatti, la retta per P_1 e P_0 ha equazione parametrica

$$P = P_0 + s(P_1 - P_0)\,.$$

Imponiamo la condizione che P_1 sia un punto della curva γ. Se

$$\gamma : \qquad P = \mathbf{f}(t)$$

dovremo imporre $P_1 = \mathbf{f}(t)$ e l'equazione parametrica del cono è

$$P = P_0 + s(\mathbf{f}(t) - P_0)\,.$$

Se il vertice è O, il cono ha equazione

$$P = s\mathbf{f}(t)\,.$$

E' spesso possibile dare anche un'equazione cartesiana per i coni. Senza dilungarci su ciò, notiamo un caso particolare.

Una funzione $f(x, y, z)$ si dice OMOGENEA DI GRADO ν, ν numero reale, se

$$f(tx, ty, tz) = |t|^\nu f(x, y, z)\,.$$

Dunque, se

$$f(x, y, z) = 0$$

vale anche

$$f(tx, ty, tz) = 0\,.$$

I punti (tx_0, ty_0, tz_0), con (x_0, y_0, z_0) fissati ed al variare di t sono tutti i punti della retta per l'origine e che passa per (x_0, y_0, z_0). La superficie descritta da $f(x, y, z) = 0$

è quindi costituita da rette tutte uscenti dall'origine. Essa si chiama ancora un CONO. Per esempio,

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

descrive un *cono circolare retto* di vertice l'origine. Una sua direttrice è la circonferenza

$$x^2 + y^2 = 0\,, \qquad z = 1\,.$$

Se f è una funzione omogenea,

$$f(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

descrive un cono di vertice z_0.

1.15.4 Superfici rigate

Una superficie si dice RIGATA se da ogni suo punto passa una retta, tutta giacente sulla superficie. Le superfici rigate sono molto importanti per le applicazioni (per esempio, possono realizzarsi con una struttura di cemento armato).

Coni e cilindri sono superfici rigate. Non sono le uniche superfici rigate, come ora vediamo su un esempio. Esempi assai più importanti verranno visti in seguito.

Esempio 45 Si scriva l'equazione parametrica della superficie descritta dalle rette con questa proprietà: una di tali rette passa per

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = t$$

ed è parallela al vettore $\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t$.

E' immediato scrivere l'equazione parametrica della superficie:

$$x = \cos t + s\sin t\,, \quad y = \sin t + s\cos t\,, \quad z = t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

La figura 1.12 rappresenta una superficie rigata. ∎

1.15.5 Superfici di rotazione

Un'altra classe importante di superfici è quella che si ottiene facendo ruotare una curva intorno ad una retta, che si chiama asse di rotazione.

Sia r l'asse di rotazione,

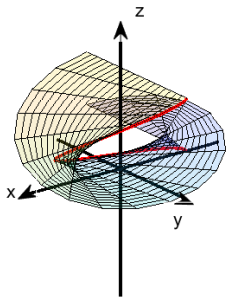
$$r\ :\qquad P = P_0 + t\mathbf{v}$$

e sia Q un punto. Indichiamo con π il piano per Q perpendicolare ad r

$$\pi\ :\qquad \mathbf{v}\cdot(P - Q) = 0\,.$$

Sia P_1 il punto comune ad r e π.

Figura 1.12: Una superficie rigata



Si dice che il punto Q ruota intorno ad r quando descrive la circonferenza del piano π il cui centro è P_1 e il cui raggio è $|Q - P_1|$, si veda la Fig. 1.13 a sinistra. La Fig. 1.13 mostra una superficie di rotazione intorno all'asse delle quote.

Applicando questa costruzione a tutti i punti di una curva γ si trova una superficie. E' questa la superficie di rotazione di γ intorno a r.

E' immediato dalla costruzione precedente che intersecando una superficie di rotazione con piani perpendicolari all'asse di rotazione r *si trovano circonferenze tutte con centro su* r, si veda la figura a destra.

Consideriamo il caso in cui l'asse di rotazione è uno degli assi coordinati, per esempio l'asse z. La curva giaccia sul piano zy, e sia data da

$$z = f(y)\,, \qquad x = 0\,.$$

Quando il punto inizialmente in $(0, t, 0)$ ruota intorno all'asse z, esso passa per i punti

$$(t\cos\theta, t\sin\theta, 0)$$

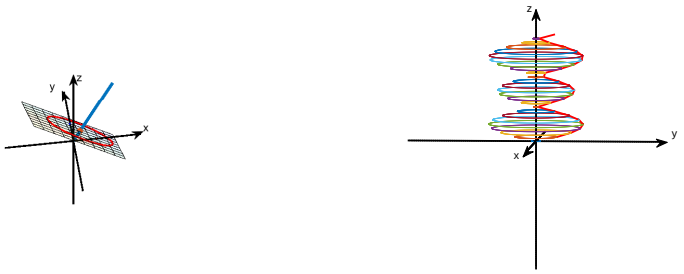
e ruotando "si porta dietro" il punto $(0, t, f(t))$ che quindi viene a descrivere la circonferenza

$$(t\cos\theta, t\sin\theta, f(t))\,.$$

L'equazione parametrica della superficie è quindi

$$x = t\cos\theta\,, \qquad y = t\sin\theta\,, \qquad z = f(t)\,.$$

Figura 1.13: A sinistra:rotazione di un punto intorno ad un asse. A destra: una superficie di rotazione intorno all'asse delle quote. Sono rappresentati alcuni paralleli ed un meridiano



Notando che

$$t = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

si trova immediatamente l'equazione cartesiana della superficie,

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})\,.$$

Viceversa, ogni superficie della forma

$$z = g(x^2 + y^2)$$

è costante sulle circonferenze $x^2 + y^2 = R^2$ e quindi è una superficie di rotazione intorno all'asse z.

Concludiamo dicendo che: l'asse intorno a cui si fa ruotare la curva γ si chiama L'ASSE DI ROTAZIONE. Le curve secondo le quali la superficie viene tagliata da piani passanti per l'asse di rotazione si chiamano i MERIDIANI della superficie, mentre le circonferenze descritte dai punti della curva γ si chiamano i PARALLELI della superficie.

1.15.6 Sezioni coniche

Vogliamo studiare le rotazioni di un cono circolare retto intorno ad un asse perpendicolare all'asse del cono e vogliamo studiare le curve che si ottengono intersecandolo con un piano fermo. Consideriamo il cono e il piano seguenti:

$$\begin{array}{ll} \text{piano} & z = 1 \\ \text{cono} & z^2 = x^2 + y^2 \end{array}$$

(cono circolare retto di asse sull'asse z ed apertura $\pi/4$). Si noti che il cono si estende sia nel semispazio $z > 0$ che nel semispazio $z < 0$.

Facciamo ruotare il cono intorno all'asse delle ascisse, misurando l'angolo di rotazione del cono a partire dall'asse z. In questo modo il cono dato corrisponde alla rotazione nulla, $\phi = 0$.

Consideriamo il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Usando le coordinate polari sul piano yz scriviamo

$$y_0 = r\cos\theta_0\,, \qquad z_0 = r\sin\theta_0$$

così che:

- l'angolo θ_0 è quello tra il verso positivo dell'asse y ed il vettore $P_0 - O$;
- le coordinate (cilindriche) del punto P_0 sono

$$x_0\,, \qquad r\cos\theta_0\,, \qquad r\sin\theta_0\,.$$

Ruotando intorno all'asse x di un angolo ϕ verso l'asse y si trova il punto P di coordinate

$$x_0\,, \qquad r\cos(\theta_0 - \phi)\,, \qquad r\sin(\theta_0 - \phi)$$

ossia

$$x = x_0\,, \qquad y = (\cos\phi)y_0 + (\sin\phi)z_0\,, \qquad z = -(\sin\phi)y_0 + (\cos\phi)z_0\,.$$

Il punto iniziale P_0 si ritrova ruotando P dell'angolo opposto:

$$x_0 = x\,, \qquad y_0 = (\cos\phi)y - (\sin\phi)z\,, \qquad z_0 = (\sin\phi)y + (\cos\phi)z\,. \tag{1.47}$$

Si confronti col paragrafo 1.7.

Facciamo ora ruotare tutti i punti P_0 del cono. In questo modo si fa ruotare tutto il cono. Naturalmente, data la simmetria del cono rispetto al suo vertice O, basta considerare le rotazioni di angolo $\phi \in [0, \pi]$.

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il generico punto del cono, esso verifica l'equazione

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2\,.$$

Il punto $P(x, y, z)$ è il corrispondente di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dopo la rotazione e quindi x_0, y_0, z_0 sono date da (1.47). Sostituendo nell'uguaglianza precedente, si trova che le coordinate x, y e z di P devono verificare

$$x^2 + [(\cos\phi)y - (\sin\phi)z]^2 = [(\sin\phi)y + (\cos\phi)z]^2\,.$$

Svolgendo i calcoli si trova che le coordinate x, y e z del generico punto del cono ruotato verificano l'equazione

$$x^2 + y^2\cos 2\phi - z^2\cos 2\phi - 2yz\sin 2\phi = 0\,.$$

Intersechiamo ora il cono ruotato col piano $z = 1$. Si trova una curva di equazione

$$z = 1\,, \qquad x^2 + y^2\cos 2\phi - 2y\sin 2\phi = \cos 2\phi\,.$$

Se $\phi = 0$, ossia se il cono non viene ruotato, si trova una circonferenza, come deve perché stiamo tagliando un cono circolare retto con un piano perpendicolare al suo asse.

La rotazione di $\pi/4$, uguale all'apertura del cono, dà $\cos 2(\pi/4) = 0$ e si trova

$$z = 1\,, \qquad 2y = x^2 \ :$$

la sezione è una parabola.

La rotazione $3\pi/4$ dà ancora $\cos 2\phi = 0$ ma $\sin 2(3\pi/4) = -1$ e si trova la parabola

$$2y = -x^2\,.$$

Se $\phi \notin \{\pi/4,\, 3\pi/4\}$ si divida per $\cos 2\phi$ e si scriva

$$z = 1\,, \qquad \frac{x^2}{\cos 2\phi} + (y - \tan 2\phi)^2 = 1 + \tan^2 2\phi = \frac{1}{\cos^2 2\phi}\,.$$

La traslazione di coordinate

$$y' = y - \tan 2\phi$$

riporta l'equazione precedente nella forma

$$x^2(\cos 2\phi) + (y')^2(\cos^2 2\phi) = 1\,.$$

Il coefficiente di y'^2 è sempre positivo. Studiando i segni del coefficiente di x^2 si trovano i casi della tabella seguente:

$\phi = 0$ e $\phi = \pi$	circonferenza $x^2 + y^2 = 1$	$\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}$	iperbole
$0 < \phi < \frac{\pi}{4}$	ellisse	$\phi = \frac{\pi}{2}$	iperbole equilatera $y^2 - x^2 = 1$
$\phi = \frac{\pi}{4}$	parabola $2y = x^2$	$\frac{3\pi}{4} < \phi < \pi$	ellisse

Si ritrovano quindi tutte le coniche che derivano da ciò il loro nome collettivo di SEZIONI CONICHE.

Osserviamo che i tre casi precedenti si interpretano anche come segue: *l'intersezione tra il cono e il piano è un'ellisse quando il piano* taglia tutte *le*

generatrici; è una parabola quando il piano è parallelo ad una sola *generatrice* (l'intersezione del cono col piano $z = 0$. La direzione di questa generatrice è quella dell'asse della parabola)*; l'intersezione è un'iperbole quando il piano secante è* parallelo a due generatrici (le intersezioni del cono col piano $z = 0$). Le direzioni di queste due generatrici sono anche le direzioni degli asintoti all'iperbole.

1.16 Ellissoidi ed iperboloidi in forma canonica

Esaminiamo ora le superfici descritte da equazioni della forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$$

con a, b, c e d numeri reali qualsiasi.

Le superfici descritte da queste equazioni si chiamano QUADRICHE IN FORMA CANONICA (le quadriche in generale si studieranno al Par. 2.12).

I casi in cui uno dei coefficienti è nullo si sono già studiati. In particolare se $d = 0$ la superficie è degenere nell'unico punto O se i tre coefficienti a, b, c hanno lo stesso segno; altrimenti è un cono.

Se uno degli altri coefficienti è nullo (e uno almeno non nullo) si trova un cilindro con asse parallelo agli assi coordinati.

Supponendo i quattro coefficienti non nulli, si divida per d e si scriva l'equazione nella forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\,.$$

Si distinguono due casi, il caso in cui i tre coefficienti hanno lo stesso segno e il caso in cui due hanno lo stesso segno e uno segno opposto.

Se i tre coefficienti sono negativi nessun punto ha coordinate (reali) che verificano l'equazione. Si parla in questo caso di ELLISSOIDE IMMAGINARIO. Escluso questo caso si rimane con i tre casi seguenti (altri casi si riconducono a questi scambiano tra loro i simboli delle coordinate):

$$\mathbf{1})\qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1\,;$$

$$\mathbf{2})\qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = -1\,;$$

$$\mathbf{3})\qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1\,.$$

Abbiamo scritto le equazioni in questa forma, da confrontarsi con l'equazione segmentaria del piano, per l'ovvio significato che assumono i numeri $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$: individuano i punti nei quali la superficie taglia gli assi, nei casi in cui l'intersezione ci sia.

La superficie rappresentata da **1**) si chiama ELLISSOIDE; si chiamano IPERBOLOIDI le superfici che si trovano nei casi **2**) e **3**).

Prima di tutto alcune proprietà comuni ai tre casi: se $P(x_0, y_0, z_0)$ è un punto della superficie, anche gli altri 7 punti le cui coordinate verificano $|x| = |x_0|$, $|y| = |y_0|$, $|z| = |z_0|$ appartengono alla superficie che quindi è simmetrica rispetto ad O (che si chiama il CENTRO dell'ellissoide oppure dell'iperboloide).

Le superfici sono anche simmetriche rispetto ai tre piani coordinati.

Se due dei coefficienti sono uguali tra loro le superfici sono di rotazione rispetto all'altro asse.

Studiamo ora i tre casi con maggiori dettagli. Per questo intersechiamo le superfici con opportuni piani ortogonali ai piani coordinati.

1.16.1 L'ellissoide

Studiamo la superficie

$$\mathbf{1)} \quad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

che si chiama ELLISSOIDE. Se i tre coefficienti sono uguali l'ellissoide è di rotazione intorno ai tre assi e si trova l'equazione della sfera.

I punti dell'ellissoide verificano

$$-p \le x \le p\,, \qquad -q \le y \le q\,, \qquad -r \le z \le r$$

e quindi l'ellissoide è contenuto nel parallelepipedo

$$[-p, p] \times [-q, q] \times [-r, r]\,.$$

Dunque *l'ellissoide è limitato.* Per capirne la forma, sezioniamolo con piani paralleli ai piani coordinati, per esempio con i piani $z = \alpha$, con $\alpha \in [-r, r]$. Si trovano le curve

$$z = \alpha\,, \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\,.$$

Queste sono ellissi che diventano sempre più piccole via via che il piano sezionante si allontana dal piano xy, fino a degenerare in un punto per $\alpha = \pm r$. E' ora facile costruire l'ellissoide sovrapponendo ellissi.

Si noti che sezionando parallelamente agli altri piani coordinati si ottengono ancora ellissi, che diventano via via più piccole fino a ridursi ad un punto.

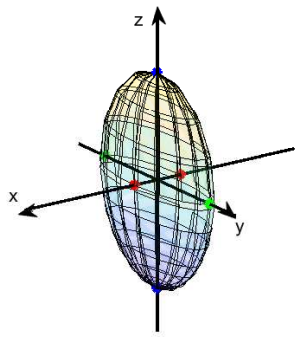
L'ellissoide ha questo nome perché tutte le sezioni parallele ai piani coordinati (e di fatto tutte le sezioni piane) sono ellissi.

La Fig. 1.14 presenta un'ellissoide con $p \neq q \neq r$.

Si noti che sezionando parallelamente agli altri piani coordinati si ottengono ancora ellissi, che diventano via via più piccole fino a ridursi ad un punto.

L'ellissoide ha questo nome perché tutte le sezioni parallele ai piani coordinati (e di fatto tutte le sezioni piane) sono ellissi.

Figura 1.14: Ellissoide (sono indicate le intersezioni con gli assi)



1.16.2 Gli iperboloidi

Studiamo ora le superfici descritte da

$$\mathbf{2)}\quad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=-1\,, \qquad \mathbf{3)}\quad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=1\,.$$

Queste superfici sono ancora simmetriche rispetto ad O (che si dice il CENTRO dell'iperboloide) ed anche rispetto ai tre piani coordinati. Le superfici sono però ora illimitate perchè ambedue le equazioni hanno soluzione per z scelto comunque grande. Anzi, si vede immediatamente una differenza importante tra i due casi: la **2)** non ha soluzioni se $|z|<r$ mentre la **3)** ha soluzione per ogni valore di z. Dunque la **2)** non ha punti nella striscia

$$-r<z<r\,, \qquad \text{ed } x,\ y \text{ qualsiasi.}$$

Per intuire la forma delle superfici, sezionamole parallelamente agli assi coordinati. Si osservi però che a causa del segno $-$ in fronte a z^2, le sezioni parallele al piano xy saranno diverse dalle sezioni parallele agli altri piani coordinati.

L'iperboloide a due falde

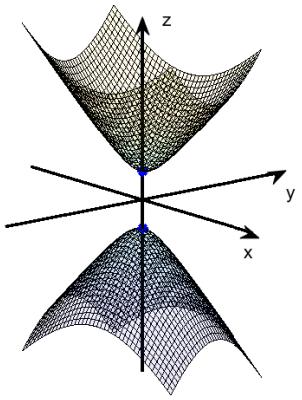
Studiamo la superficie **2)**. Piani paralleli ad xy che la intersecano hanno $|z|\geq r$ e, per simmetria, basta studiare il caso $z>0$. Per $z=r$ l'intersezione si riduce al solo punto

$(0,0,r)$. Per $z = z_0 > r$ si trova l'ellisse

$$z = z_0\,, \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = -1 + \frac{z_0^2}{r^2}\,.$$

Queste ellissi diventano via via più grandi al crescere di z. La parte della superficie in $z > 0$ si costruisce quindi sovrapponendo ellissi via via più grandi. La parte della superficie in $z < 0$ è ottenuta dalla precedente per simmetria rispetto al piano xy. Dunque, *la superficie ha due falde,* si veda la Fig. 1.15.

Figura 1.15: Iperboloide a due falde



La superficie si chiama un iperboloide perchè le sezioni parallele ad yz e quelle parallele a xz sono iperboli. Si ha per esempio

$$x = x_0\,, \qquad \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = -1 - \frac{x_0^2}{p^2}\,.$$

Più precisamente, questa superficie si chiama IPERBOLOIDE A DUE FALDE.

Cono asintotico Consideriamo l'iperboloide a due falde, per esempio

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0$$

ed il cono

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0\,.$$

Il cono si chiama CONO ASINTOTICO per questa ragione: tagliamo sia il cono che l'iperboloide con un piano per l'asse z, per esempio col piano

$$y = mx\,.$$

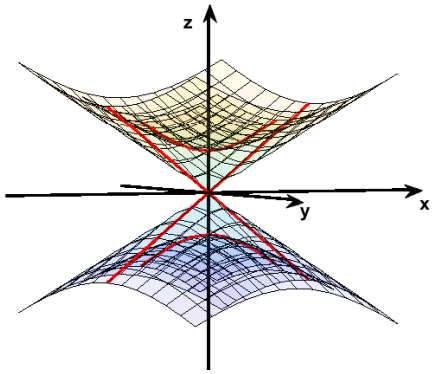
Le curve intersezione sono rispettivamente un'iperbole e due rette,

$$\begin{aligned} y = mx \quad & x^2\left[\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{m^2}{q^2}\right]-\tfrac{z^2}{r^2}=-1 \\ y = mx \quad & x^2\left[\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{m^2}{q^2}\right]-\tfrac{z^2}{r^2}=0 \end{aligned}$$

e si vede immediatamente che le due rette sono gli asintoti dell'iperbole. Ciò spiega il nome attribuito a tale cono.

Si veda la Fig. 1.16.

Figura 1.16: Il cono asintotico ad un iperboloide



L'iperboloide ad una falda

Studiamo ora la superficie **3)** Come si è detto anche questa superficie è illimitata ma nessuna striscia la divide in due parti separate. Sezionando parallelamente ad xy si trovano le ellissi

$$z = z_0\,, \qquad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1+\frac{z^2}{r^2}\,.$$

Nessuna di queste degenera in un punto. Tra queste ellissi quella che ha semiassi minori si trova per $z=0$ (e si dice ELLISSE DI GOLA.) Le ellissi crescono

all'allontanarsi della sezione dal piano xy. Dunque anche questa superficie si costruisce giustapponendo ellissi, come in Fig. reffiggeo4IPERB1Faldadue viste. In questa figura è indicato il solo asse delle quote e l'iperboloide è visto da due punti diversi.

Figura 1.17: Il medesimo iperboloide ad una falda visto da due ounti diversi (è indicato il solo asse delle quote)

La superficie si chiama ancora "iperboloide" perché sezionando parallelamente ai piani xz ed yz si trovano iperboli, per esempio

$$x - x_0\,, \qquad \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1 - \frac{x_0^2}{p^2}\,.$$

Più precisamente la chiameremo IPERBOLOIDE AD UNA FALDA.

E' importante sapere che *l'iperboloide ad una falda è una superficie rigata;* e questa proprietà viene comunemente usata per costruire torri in cemento armato, appunto a forma di iperboloide ad una falda (e, usualmente, di rotazione intorno all'asse verticale). Per vederlo, si scriva l'equazione **3)** nella forma equivalente

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1 - \frac{y^2}{q^2}$$

e quindi anche come

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{r}\right)\left(\frac{x}{p} - \frac{z}{r}\right) = \left(1 + \frac{y}{q}\right)\left(1 - \frac{y}{q}\right)\,.$$

Consideriamo ora la famiglia di rette ottenuta come intersezione dei due piani seguenti. I numeri α e β sono parametri reali qualsiasi purché non ambedue nulli.

$$\alpha\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{r}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{q}\right)\,, \qquad \beta\left(\frac{x}{p} - \frac{z}{r}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{q}\right)\,. \tag{1.48}$$

Se un punto $P(x, y, z)$ giace su una di queste rette, esso giace anche sull'iperboloide ad una falda, come si vede moltiplicando membro a membro; anzi, *per ciascun punto*

$P(x_0, y_0, z_0)$ dell'iperboloide passa una (soltanto) delle rette della famiglia (1.48).
Infatti, i numeri x_0, y_0, z_0 verifichino

$$\left(\frac{x_0}{p} + \frac{z_0}{r}\right)\left(\frac{x_0}{p} - \frac{z_0}{r}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{q}\right)\left(1 - \frac{y_0}{q}\right) . \tag{1.49}$$

Mostriamo che esistono numeri α e β, non ambedue nulli, per cui

$$\alpha\left(\frac{x_0}{p} + \frac{z_0}{r}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_0}{q}\right) ,$$
$$\beta\left(\frac{x_0}{p} - \frac{z_0}{r}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_0}{q}\right) .$$

Se per esempio $1 + y_0/q = 0$ mentre $(x_0/p_0) + (z_0/r_0) \neq 0$ allora si scelga $\alpha = 0$. In questo modo si verifica la prima uguaglianza. La seconda è automaticamente soddisfatta perchè, da (1.49), segue che $(x_0/p_0) - (z_0/r_0) = 0$.

In modo analogo si studiano le altre possibilità.

Si osservi una conseguenza di ciò che abbiamo provato:

Teorema 46 *Le rette dell'insieme (1.48) sono due a due sghembe.*

Dim. Scriviamo le rette in forma parametrica:

$$\begin{cases} x &= t\left(\frac{1}{2m} - \frac{m}{2}\right) + \left(\frac{1}{2m} + \frac{m}{2}\right) \\ y &= t \\ z &= t\left(\frac{1}{2m} + \frac{m}{2}\right) + \left(\frac{1}{2m} - \frac{m}{2}\right) . \end{cases} \tag{1.50}$$

Ciscuna retta è individuata dal parametro m.

Fissiamo un valore per m e consideriamo una seconda retta, individuata dal valore k del parametro:

$$\begin{cases} x &= t\left(\frac{1}{2k} - \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{1}{2k} + \frac{k}{2}\right) \\ y &= t \\ z &= t\left(\frac{1}{2k} + \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{k}{2}\right) . \end{cases} \tag{1.51}$$

Se i parametri m e k sono tali che le due rette sono parallele allora

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1/2m) - (m/2) \\ 1 \\ (1/2m) + (m/2) \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} (1/2k) - (k/2) \\ 1 \\ (1/2k) + (k/2) \end{bmatrix}$$

devono essere proporzionali ed avendo uguale la seconda componente, devono essere uguali. Ciò può aversi solo se $m = k$. In tal caso però anche i termini costanti delle due equazioni (1.50) e (1.51) sono uguali e le due rette coincidono.

Dunque, rette diverse non sono parallele.

Proviamo che le due rette (1.50) e (1.51) con $m \neq k$ non si intersecano. Infatti, un eventuale punto comune deve verificare

$$\begin{cases} t\left(\frac{1}{2m} - \frac{m}{2}\right) + \left(\frac{1}{2m} + \frac{m}{2}\right) = \tau\left(\frac{1}{2k} - \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{1}{2k} + \frac{k}{2}\right) \\ t = \tau \\ t\left(\frac{1}{2m} + \frac{m}{2}\right) + \left(\frac{1}{2m} - \frac{m}{2}\right) = \tau\left(\frac{1}{2k} + \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{k}{2}\right) . \end{cases}$$

Dunque, $t = \tau$ e, sommando e sottraendo la prima e la terza,

$$\begin{cases} t\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} & \Longrightarrow \quad t = -1 \\ t(m-k) = m - k & \Longrightarrow \quad t = 1 \end{cases}$$

perché $m \neq k$.

Dunque, le due rette non si incontrano e non essendo parallele sono sghembe. ∎

Sull'iperboloide ad una falda esiste anche una seconda famiglia di rette, con proprietà analoghe alle precedenti, che si ottiene fattorizzando in modo diverso l'equazione dell'iperboloide ad una falda, e che è data da

$$\gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{r}\right) = \delta\left(1 - \frac{y}{q}\right), \qquad \delta\left(\frac{x}{p} - \frac{z}{r}\right) = \gamma\left(1 + \frac{y}{q}\right). \tag{1.52}$$

I numeri γ e δ sono ancora parametri qualsiasi, purché non ambedue nulli.

E' ancora vero che da un qualsiasi punto dell'iperboloide esce una e una sola retta della famiglia (1.52) e quindi *una retta della prima famiglia incontra sempre una retta della seconda famiglia.*

Per concludere, notiamo che le famiglie di rette sono identificate da "numerosi" parametri (i parametri α, β, γ, δ ma anche p, q, r, che però identificano effettivamente sistemi diversi di rette se non sono proporzionali). Questo ha una conseguenza: fissata un'ellisse di gola si trovano infiniti sistemi di rette che generano un iperboloide ad una falda che ha la data ellisse di gola. Dunque una struttura costituita solamente dalle rette che si trovano su un iperboloide ad una falda "non sta ferma". La struttura diviene stabile se vengono saldati i punti di intersezione delle rette o, più semplicemente, se queste vengono fissate ad un secondo ellissoide che si trova sulla superficie.

Diciamo infine che le due famiglie di rette che giacciono sull'iperboloide si chiamano SCHIERA DI RETTE.

1.17 Paraboloidi in forma canonica

Si chiamano PARABOLOIDI IN FORMA CANONICA le superfici che hanno un'equazione del tipo

$$\mathbf{4)} \quad z = \pm\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right), \qquad \mathbf{5)} \quad z = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}.$$

A differenza dei casi studiati prima, in queste equazioni solo due delle variabili figurano elevate al quadrato, mentre una di esse entra "linearmente" ossia figura elevata a potenza 1.

La superficie **4)** si chiama PARABOLOIDE ELLITTICO mentre la superficie **5)** si chiama PARABOLOIDE IPERBOLICO o anche PARABOLOIDE A SELLA

Nel caso della superficie **5)** non c'è ragione di studiare i due casi, in cui z è moltiplicata per 1 oppure per -1, perché questo equivale a scambiare l'asse x con l'asse y. I due casi invece vanno distinti nel caso dell'equazione **4)**. E' però chiaro che studiato uno di essi, l'altro si ottiene semplicemente cambiando il verso dell'asse z.

Ovviamente ambedue i paraboloidi sono simmetrici rispetto ai piano xz ed yz, nel senso che se $P(x, y, z)$ è un punto del paraboloide, anche i tre altri punti che si trovano cambiando i segni delle coordinate x e di y sono ancora punti del paraboloide. Invece, non c'è simmetria rispetto al piano xy. Per questo, per i paraboloidi *non si definisce un "centro": i paraboloidi* non *sono quadriche a centro.*

Il paraboloide ellittico

Studiamo il paraboloide di equazione

$$\mathbf{4)} \quad z = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\,.$$

La superficie è contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e passa per O. Inoltre è superiormente illimitata. Le sezioni con i piani ortogonali all'asse z, e che tagliano in punti di quota positiva sono le *ellissi*

$$z = z_0\,, \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z_0$$

di centro sull'asse z ed assi paralleli agli assi x ed y. I semiassi misurano rispettivamente $p\sqrt{z_0}$ e $q\sqrt{z_0}$.

Le ellissi si restringono via via che z_0 si avvicina a O e si allargano via via che z_0 cresce. Dunque la superficie si disegna facilmente sovrapponendo ellissi, come in Fig. 1.18. Per questa ragione il paraboloide che stiamo studiando si chiama PARABOLOIDE ELLITTICO.

Le sezioni con i piani paralleli ai piani $x = 0$ e $y = 0$ sono parabole. Per esempio

$$y = y_0\,, \qquad z = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y_0^2}{q^2}\,.$$

Il piano $y = 0$ taglia il paraboloide lungo la parabola

$$z = \frac{x^2}{p^2}\,,$$

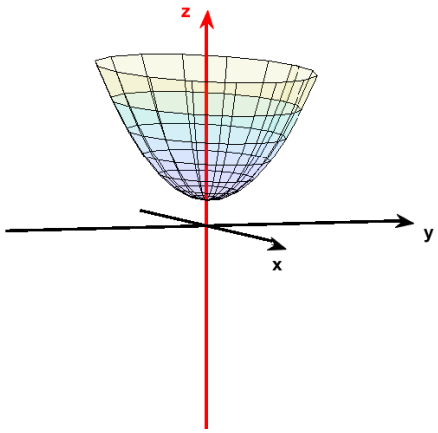
di vertice in O. E infatti ogni piano per l'asse z, che ha equazione

$$y = mx \qquad \text{oppure} \qquad x = my\,,$$

taglia il paraboloide lungo una parabola di vertice in O.

Il punto O si chiama il VERTICE del paraboloide ellittico.

Figura 1.18: Paraboloide ellittico



Il paraboloide iperbolico

Il PARABOLOIDE IPERBOLICO

$$\mathbf{5)} \quad z = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}\,.$$

è una superficie illimitata sia per $z > 0$ che per $z < 0$. Infatti ogni piano $z = z_0$ taglia la superficie sia per $z_0 > 0$ che per $z_0 < 0$. Le sezioni sono le *iperboli*

$$z = z_0\,, \qquad \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z_0$$

e ciò spiega il nome "paraboloide iperbolico" dato a questa superficie. Fa eccezione il caso $z = 0$. In questo caso la sezione è costituita dalle due rette

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0\,, \qquad \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = 0\,.$$

Queste rette sono parallele (su un piano diverso) agli asintoti delle iperboli.

L'intersezione con il piani $x = x_0$ è la parabola

$$z = -\frac{y^2}{q^2} + \frac{x_0^2}{p^2}\,,$$

rivolta verso il basso, mentre l'intersezione con il piano $y = y_0$ è la parabola

$$z = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y_0^2}{q^2}\,,$$

rivolta verso l'alto. Il paraboloide si rappresenta facilmente giustapponendo una di queste famiglie di parabole, come in Fig. 1.19. Questa figura mostra lo stesso paraboloide iperbolico visto da due punti diversi.

Figura 1.19: Il paraboloide iperbolico visto da due punti diversi

La superficie ha l'aspetto di una *sella,* e questo spiega il secondo nome di questa superficie: PARABOLOIDE A SELLA.

Abbiamo notato che questa superficie contiene rette. In effetti è una *superficie rigata* e da ciascun suo punto escono *due rette.* Queste rette si possono ripartire in due famiglie ed accade che tutte le rette di una famiglia sono sghembe tra loro mentre rette di famiglie diverse si intersecano. Ossia si hanno proprietà analoghe a quelle dell'iperboloide ad una falda. La dimostrazione si fa in modo simile, notando che l'equazione della superficie può scriversi come

$$z = \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)$$

e quindi

$$\frac{z}{\left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)} = \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)\,.$$

L'uguaglianza vale se, in particolare,

$$\begin{cases} z = \lambda\left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right) \\ \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \lambda \end{cases}$$

con λ parametro reale qualsiasi.

Per ciascun valore di λ si trova l'equazione di una retta, parallela al piano

$$\pi_0 : \qquad \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = 0\,.$$

Infatti, ciascuna retta si ottiene intersecando π_0 col piano

$$\pi : \qquad z = \lambda \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)\,. \tag{1.53}$$

Dunque, *le rette di questa famiglia non si incontrano;* e dato che i piani (1.53) non sono tra loro paralleli, *le rette sono a due a due sghembe.*

Inoltre, *ogni punto del paraboloide appartiene ad una di queste rette.*

In modo analogo si trova la seconda famiglia di rette, scrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{z}{\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)} = \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)$$

e notando che questa condizione è soddisfatta dalla famiglia di rette

$$\begin{cases} z = \mu \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \\ \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right) = \mu\,, \end{cases}$$

con μ parametro reale.

Così come nel caso dell'iperboloide ad una falda, le due famiglie di rette si chiamano SCHIERE DI RETTE e, come si è visto, da ciascun punto del paraboloide iperbolico escono due rette giacenti sulla superficie, una della prima e una della seconda schiera. Il piano che esse individuano è il piano tangente alla superficie nel punto considerato.

Capitolo 2

Matrici e vettori: cenni di algebra lineare

L'algebra lineare è un complesso di idee e risultati astratti che possono applicarsi a numerose situazioni concrete. Noi ne mostreremo una parte facendo riferimento al caso particolare dell'algebra lineare di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{C}^n$. Per trattare i due casi in modo unificato indicheremo con Φ l'insieme degli scalari, ossia o i numeri complessi o i numeri reali. In casi concreti sarà $\Phi = \mathbb{R}$ oppure $\Phi = \mathbb{C}$. E Φ^n in casi concreti sarà $\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$.

I risultati che vedremo sono in larga parte i medesimi sia quando $\Phi^n = \mathbb{C}^n$ che quando $\Phi^n = \mathbb{R}^n$ (a parte che nel caso reale il segno di coniugato si può omettere). Indicheremo esplicitamente le poche differenze e useremo i simboli specifici $\mathbb{C}^n$ oppure $\mathbb{R}^n$ quando necessario.

Alcune definizioni e proprietà che studieremo sono già state incontrate studiando la geometria di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$. Per completezza esse verranno ripetute.

2.1 Spazi e sottospazi

Il simbolo Φ^n indica le n-ple ordinate di elementi di Φ. Gli elementi di Φ^n si indicheranno con caratteri in grassetto, per esempio $\mathbf{x}$ o $\mathbf{v}$. Le n–ple *ordinate* di numeri di Φ si rappresentano come $(x_1\,, \cdots x_n)$. Quando sarà conveniente fare intervenire operazioni matriciali, sarà utile scriverle come *colonne di numeri* oppure, per risparmiare spazio, come una riga seguita da ^{T} e delimitate da parentesi quadre:

$$(x_1\,, x_2\,, \dots x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T .$$

Queste notazioni si sono già introdotta al paragrafo 1.2.1.

Gli elementi di Φ^n si chiamano VETTORI e lo spazio Φ^n si chiama SPAZIO VETTORIALE o anche SPAZIO LINEARE. I numeri di Φ in questo contesto si chiamano anche SCALARI e l'insieme Φ stesso (ossia, per noi, $\Phi = \mathbb{R}$ oppure $\Phi = \mathbb{C}$) si chiama il CAMPO SCALARE.

In Φ^n si definiscono le due operazioni di SOMMA e di PRODOTTO PER SCALARI:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Si chiama VETTORE NULLO di Φ^n il vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Questo vettore si indica[1] col simbolo 0.

Se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

si indica con $-\mathbf{x}$ il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & \dots & -x_n \end{bmatrix}^T.$$

Esso si chiama L'OPPOSTO di $\mathbf{x}$.

E' immediato verificare che valgono le "usuali" regole di calcolo:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x} + 0 = \mathbf{x} \\ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0 \\ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \\ (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \\ 0\mathbf{x} = 0\,, \qquad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}\,, \quad (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Come al solito, scriveremo $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ invece di $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

[1] un po' di pratica insegna a distinguere tra il simbolo 0, usato per indicare il vettore 0 e il simbolo 0 usato per indicare il numero zero. Si noti inoltre una discrepanza tra l'uso dell'algebra lineare e quello della geometria analitica: in geometria analitica il vettore 0 è l'origine degli assi, e si indica O.

Sia $X = C(a,b)$ lo spazio delle funzioni continue su $[a,b]$ dotato delle usuali operazioni $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ per ogni "scalare" α. E' immediato verificare che le regole di calcolo (2.1) valgono in $C(a,b)$; esse valgono anche nell'insieme dei polinomi, o delle funzioni integrabili, o delle successioni e in numerosissimi altri casi. Questi esempi suggeriscono di chiamare "spazio vettoriale" o "spazio lineare" un qualsiasi insieme dotato di operazioni che godono delle proprietà (2.1).
Le regole di calcolo valgono anche nell'insieme delle matrici $m \times n$, dotato dell'operazione di addizione e di prodotto per scalari. Dunque anche le matrici $m \times n$ costituiscono uno spazio vettoriale.
Un caso estremo è il caso di Φ stesso. Anche Φ è uno spazio vettoriale su se stesso, ossia col campo scalare che è Φ stesso.
Quando vogliamo precisare che uno spazio vettoriale ha per scalari i numeri reali oppure complessi diremo che esso è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Sia X un sottinsieme di Φ^n. Si dice che X è un SOTTOSPAZIO se *per ogni* scalare α e *per ogni* coppia $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ di elementi di X vale

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in X\,, \qquad \alpha\mathbf{x}_1 \in X\,.$$

Ovvi esempi di sottospazi sono tutto lo spazio Φ^n e il SOTTOSPAZIO NULLO, quello il cui unico elemento è 0. Questi si chiamano i SOTTOSPAZI BANALI. Tutti gli altri si chiamano SOTTOSPAZI PROPRI.

Il sottospazio nullo si indica anche col simbolo[2] 0.

Si confronti con i paragrafi 1.9 e 1.10.

2.2 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_j$ elementi di uno spazio vettoriale (nel caso "concreto" che a noi interessa, elementi di Φ^n). Siano $\alpha_1,\ldots,\alpha_j$ numeri. L'elemento

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

si chiama COMBINAZIONE LINEARE degli $\mathbf{x}_i$.

Può accadere che il vettore 0 sia combinazione lineare degli $\mathbf{x}_i$,

$$0 = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

[2] e questo è un terzo significato del simbolo 0!

con gli α_i NON tutti nulli. In questo caso si dice che l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$ è LINEARMENTE DIPENDENTE. Altrimenti, ossia se la condizione

$$0 = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

implica $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_j = 0$, l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$ si dice LINEARMENTE INDIPENDENTE.

Ovviamente *un insieme di vettori a cui appartiene il vettore 0 è sempre linearmente dipendente.* Per vederlo, si associ coefficiente 1 all'elemento nullo e coefficiente nullo agli altri.

E' importante notare:

Teorema 47 *Siano $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$ elementi di Φ^n e sia X l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari,*

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i \,, \quad \alpha_i \in \Phi \right\} . \tag{2.2}$$

L'insieme X è un sottospazio di Φ^n.

Il sottospazio X definito in (2.2) si dice il *sottospazio generato dei vettori $\mathbf{x}_i$.* Il simbolo che si usa per indicare il sottospazio generato dagli $\mathbf{x}_i$ è

$$\text{span}\{\mathbf{x}_i\} .$$

Si noti un caso particolare: se $i = 1$ e se $\mathbf{x}_1 \neq 0$, allora $x \in \text{span}\{\mathbf{x}_1\}$ se esiste un numero α tale che $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1$. Se $\alpha \neq 0$ allora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_1$ si dicono COLINEARI.

Teorema 48 *Sia $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$ un insieme linearmente indipendente in Φ^n. Sia $\mathbf{x} \in \Phi^n$. Se esistono, numeri α_i per cui*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i \,,$$

tali numeri sono univocamente determinati.

Dim. Valga anche

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{j} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i \,.$$

Sottraendo si trova

$$0 = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{j} (\alpha_i - \hat{\alpha}_i) \mathbf{x}_i \,.$$

L'indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{x}_i$ mostra che i coefficienti $\alpha_i - \hat{\alpha}_i$ sono tutti nulli:

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i \,. \quad \blacksquare$$

Sia ora $X \neq 0$ un sottospazio di Φ^n (non si esclude che sia $X = \Phi^n$). Sia $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$ un insieme *linearmente indipendente* di vettori, ciascuno dei quali appartiene ad X. Se *per ogni* $\mathbf{x} \in X$ esistono numeri α_i per cui

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathbf{x}_i \,,$$

ossia se

$$X = \mathsf{span}\{\mathbf{x}_i\} \,,$$

allora l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$, ricordiamo *linearmente indipendente,* si dice una BASE di X.

Si ricordi, dal teorema 48, che, fissata la base, i numeri α_i sono univocamente determinati. Il numero α_i si chiama la COMPONENTE[3] di $\mathbf{x}$ rispetto al vettore $\mathbf{x}_i$ della base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j\}$.

Osservazione 49 Ovviamente, un sottospazio diverso da 0 ha infinite basi. Dunque, per esempio $\mathbf{x}_1$ può essere un elemento di più basi diverse. La componente di $\mathbf{x}$ relativa a $\mathbf{x}_1$ muta se si cambiano gli altri elementi della base, ossia se si cambia la base.

Secondo la definizione data sopra, il sottospazio 0 è privo di base. $\blacksquare$

E' importante sapere:

Teorema 50 *Due basi diverse di un medesimo sottospazio lineare hanno lo stesso numero di elementi, che si dice la* DIMENSIONE *dello spazio.*

Si noti che:

1. secondo la nostra definizione, una base è sempre un insieme finito.
2. le considerazioni precedenti non fanno uso del fatto che si sta lavorando in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Esse valgono in qualsiasi spazio vettoriale nel quale esiste una base.
3. esistono spazi vettoriali diversi da 0 e privi di base (finita: si prova che una base infinita esiste sempre ma la definizione di "base" in tal caso è un po' diversa da quella che abbiamo dato): per esempio, nessun insieme finito di polinomi genera, mediante combinazioni lineari, l'insieme di tutti i polinomi. Si dice che uno spazio "ha dimensione infinita" quando non ammette basi (finite).

[3] ormai non useremo più il termine "(coefficiente della) componente" e scriveremo direttamente "componente". Useremo il termine "coordinata" quando intenderemo riferirsi alle coordinate di punti.

Una base particolare di Φ^n è quella costituita dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Questi sono n elementi e quindi:

Teorema 51 *Ogni base di Φ^n ha n elementi ossia Φ^n ha dimensione n.*

La base $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ appena introdotta si chiama la BASE CANONICA DI Φ^n Si noti che essa è una base sia di $\mathbb{R}^n$ che di $\mathbb{C}^n$.

Vale:

Teorema 52 *Sia X il sottospazio generato dagli r vettori $\mathbf{x}_i$ non tutti nulli. Un opportuno sottoinsieme di $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ è una base per X. Dunque, la dimensione di X è minore o uguale ad r.*

Dim. Premettiamo un osservazione: siano $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$ vettori qualsiasi e sia $\mathbf{x}_0$ un vettore che è combinazione lineare di essi,

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \mathbf{x}_i \,.$$

Ovviamente i due insiemi di vettori $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ e $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ generano il medesimo sottospazio. Usiamo quest'osservazione per estrarre una base dall'insieme di vettori $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$, procedendo come segue: il primo elemento della base è il primo dei vettori dell'insieme che è non nullo. Per fissare le idee, sia esso $\mathbf{x}_1$. Il successivo elemento $\mathbf{x}_2$ si accetta come elemento della base se esso non è multiplo di $\mathbf{x}_1$, altrimenti si rifiuta. Si proceda così fino a trovare un elemento che non è multiplo di $\mathbf{x}_1$. Se questo non si trova allora $\mathbf{x}_1$ genera X, che ha dimensione 1, e una base è costituita dal solo elemento $\mathbf{x}_1$.

Altrimenti, sia $\mathbf{x}_{i_2}$ il primo elemento linearmente indipendente da $\mathbf{x}_1$. Si accetti questo elemento come elemento della base e si guardino gli elementi $\mathbf{x}_i$ con $i > i_2$. Se nessuno di essi è linearmente indipendente da $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_{i_2}$ allora X ha dimensione 2 e se ne è trovata una base. Altrimenti, scegliamo il primo elemento indipendente da $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{i_2}\}$. Sia esso $\mathbf{x}_{i_3}$. Consideriamo l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{i_2}, \mathbf{x}_{i_3}\}$, che è linearmente indipendente, e ripetiamo il procedimento.

Dopo un numero finito di passi si arriva ad esaminare tutti i vettori $\mathbf{x}_i$, decidendo se accettarli o meno come elementi della base, e si rimane con un sottoinsieme $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{i_2}, \mathbf{x}_{i_3}, \ldots, \mathbf{x}_{i_\nu}\}$ che è linearmente indipendente e che genera X, ossia ne è una base. ∎

Osservazione 53 Possiamo ora rispondere al "problema della ridondanza" sollevato al paragrafo 1.10.1. l'insieme di generatori non è ridondante se e solo se è linearmente indipendente.

Decidere se un assegnato insieme di generatori è o meno linearmente dipendente può essere difficile, specialmente se essi sono "molti". Un metodo computazionale per questo è presentato al paragrafo 2.9.1. ∎

La stessa idea usata nella dimostrazione del Teorema 52 si usa per provare:

Teorema 54 *Sia X un sottospazio di Φ^n. Esiste un sottospazio Y di Φ^n con questa proprietà: ogni $\mathbf{v} \in \Phi^n$ si rappresenta (in modo unico) come*

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{x} \in X\,, \quad \mathbf{y} \in Y\,.$$

Dim. Se $X = \Phi^n$ allora si scelga $Y = 0$. Altrimenti si costruisca una base $\{\mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2\,, \ldots\,, \mathbf{x}_r\}$ di X e si aggiungano elementi $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$,$\ldots$ $\mathbf{y}_{n-r}$ fino ad ottenere una base di Φ^n. Ciò può farsi, non in modo unico, scegliendo un primo elemento $\mathbf{y}_1$ che non è combinazione lineare degli $\mathbf{x}_i$ (esiste, perchè $X \neq \Phi^n$).

Si noti che la scelta di $\mathbf{y}_1$ *non è unica.*

Se $\{\mathbf{x}_1\,, \ldots\,, \mathbf{x}_r\,, \mathbf{y}_1\}$ è una base di Φ^n, ossia se $r = n-1$, si scelga per Y lo spazio generato da $\mathbf{y}_1$. Altrimenti si scelga un $\mathbf{y}_2$ che non è combinazione lineare di $\{\mathbf{x}_1$,$\ldots$,$\mathbf{x}_r$, $\mathbf{y}_1\}$. Si iteri. Dato che in Φ^n non ci sono più di n elementi linearmente indipendenti, il processo si blocca quando abbiamo scelto $\mathbf{y}_{n-r}$.

Il sottospazio Y richiesto è quello generato dai vettori $\mathbf{y}_j$. ∎

Osservazione 55 Ciascuno dei sottospazi Y di Φ^n con la proprietà detta nel teorema 54 si chiama SOTTOSPAZIO COMPLEMENTARE di X. *Il sottospazio complementare di X è unico se e solo se $X = \Phi^n$ (in questo caso il complementare è 0) oppure se $X = 0$ (in questo caso il complementare è Φ^n). Altrimenti di sottospazi complementari ce ne sono infiniti, tutti con la stessa dimensione.*

Una scelta particolarmente utile dello spazio complementare si vedrà al paragrafo 2.8.1. ∎

Dalla dimostrazione precedente si vede anche:

Corollario 56 *Sia $\{\mathbf{x}_1\,, \ldots\,, \mathbf{x}_r\}$ una base di un* sottospazio proprio *X di Φ^n. Esistono $n-r$ elementi $\mathbf{y}_{r+1}$,$\ldots$,$\mathbf{y}_n$ tali che*

$$\{\,\mathbf{x}_1\,, \ldots\,, \mathbf{x}_r\,, \mathbf{y}_{r+1}\,, \ldots\,, \mathbf{y}_n\,\}$$

è una base di Φ^n.

Dim. Si applichi la costruzione vista nel teorema 52 all'insieme costituito dai vettori $\mathbf{x}_i$. Si indica con $\mathbf{y}_1$ un lettore linearmente indipendente dagli $\mathbf{x}_i$ (esiste, perché il sottospazio generato dagli $\mathbf{x}_i$ *non* è Φ^n). Si itera quindi il procedimento fino a trovare che lo spazio generato è Φ^n. ∎

Fissiamo ora X ed un suo complementare Y e si rappresenti ogni $\mathbf{v} \in \Phi^n$ come somma

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{x} \in X\,, \quad \mathbf{y} \in Y\,.$$

Il vettore $\mathbf{x}$ si chiama la PROIEZIONE di $\mathbf{v}$ su X, *parallelamente ad* Y*;* il vettore $\mathbf{y}$ si chiama la *proiezione di* $\mathbf{v}$ *su* Y *parallelamente ad* X*.*

Per capire il significato del teorema precedente, si consideri:

Esempio 57 Sia X il sottospazio $z = 0$ di $\mathbb{R}^3$. Dunque, X è il piano xy. Ciascun sottospazio

$$t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$$

con $c \neq 0$ è complementare di X. Ossia, sono complementari del piano xy tutte le rette che non gli appartengono.

Fissato un complementare, le due proezioni di un vettore $\mathbf{v}$ si usano correntemente in fisica. Al paragrafo 1.13 abbiamo studiato il caso particolare delle proiezioni ortogonali. ∎

2.2.1 Basi ordinate e orientazione dello spazio

Si è visto che in $\mathbb{R}^3$ conviene lavorare con basi ordinate; e certe leggi fisiche esplicitamente richiedono ciò. D'altra parte certe costruzioni, come quella nella dimostrazione del teorema 52, esplicitamente costruiscono una base elencandone gli elementi in un certo ordine. Quando gli elementi di una base si assegnano stabilendo l'ordine in cui si susseguono, si diche che LA BASE È ORDINATA. *Da ora in poi lavoreremo sempre con basi ordinate.*

La particolare base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\,, \ldots\,, \mathbf{e}_n\}$ introdotta in (2.3), con gli elementi che si susseguono nell'ordine ivi specificato è una base ordinata.

Si noti che la base canonica di Φ ha per unico elemento il numero 1.

Siano

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{x}_3 &= \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Il determinante

$$d = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

rappresenta il "volume con segno" del parallelepipedo individuato dai tre vettori, pensati applicati nell'origine. Dunque, i tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $d \neq 0$. Quest'osservazione si può generalizzare:

Teorema 58 *Siano* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ n *vettori di* Φ^n,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{1\,1} & x_{1\,2} & x_{1\,3} & \ldots & x_{1\,n} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} & \ldots & x_{2\,n} \end{bmatrix}^T \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_n &= \begin{bmatrix} x_{n\,1} & x_{n\,2} & x_{n\,3} & \ldots & x_{n\,n} \end{bmatrix}^T .
\end{aligned}$$

Questi sono linearmente indipendenti, e quindi una base di Φ^n*, se e solo se è* non nullo *il determinante*

$$d = \begin{vmatrix} x_{1\,1} & x_{1\,2} & x_{1\,3} & \ldots & x_{1\,n} \\ x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} & \ldots & x_{2\,n} \\ \vdots & & & & \\ x_{3\,1} & x_{3\,2} & x_{3\,3} & \ldots & x_{n\,n} \end{vmatrix} . \tag{2.4}$$

Nel caso particolare della base canonica il determinante in (2.4) vale 1. Come si è fatto in $\mathbb{R}^3$ si può usare quest'osservazione e la proprietà dei determinanti di cambiare di segno scambiano due righe (o due colonne), per dividere le basi di $\mathbb{R}^n$ in due classi: si chiamano POSITIVE o *concordi con la base canonica* quelle basi per cui il determinante (2.4) è positivo; *negative* o *discordi* le altre. Per questa ragione, quando si sceglie una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ si dice che si SUBORDINA UN'ORIENTAZIONE in $\mathbb{R}^n$.
Il teorema 58 vale anche in $\mathbb{C}^n$ ma queste ultime considerazioni relative al segno del determinante valgono soltanto in $\mathbb{R}^n$. Infatti, non si introduce un'ordinamento tra i numeri complessi.
Notiamo inoltre che, come si è visto al paragrafo 1.6, l'introduzione di una base ordinata in $\mathbb{R}^3$ permette di definire il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Niente di simile può farsi in $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$: il prodotto vettoriale si definisce solamente in $\mathbb{R}^3$.

2.3 Trasformazioni lineari

Una funzione f da Φ^n in Φ^m si dice TRASFORMAZIONE LINEARE se per ogni α e β in Φ e per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori di Φ^n si ha

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) .$$

Si può quindi dire che *le rette per l'origine di* $\mathbb{R}^3$ *sono le immagini delle trasformazioni lineari da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}^3$ *e i piani per l'origine sono le immagini delle trasformazioni lineari da* $\mathbb{R}^2$ *in* $\mathbb{R}^3$*, si vedano i paragrafi 1.9 e 1.10.*

E' immediato verificare che le trasformazioni

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sono trasformazioni lineari. Vedremo che tutte le trasformazioni lineari possono rappresentarsi in questo modo e ciò suggerisce una notazione particolare quando si usano trasformazioni lineari: invece di scrivere $f(x)$, con la parentesi, si scrive fx, *senza parentesi.* Ciò facendo, si intende indicare, anche senza dirlo esplicitamente, *che la funzione è lineare.* Inoltre, per non confondere il simbolo f, che vuol indicare una funzione, con quelli che indicano gli scalari, si usa la lettera maiuscola. Dunque, scrivendo una notazione del tipo

$$Fx\,, \qquad Ax\,, \qquad Bx$$

si intende indicare $F(x)$, $A(x)$, $B(x)$ e inoltre si intende dire che *queste funzioni sono lineari.*

Vale:

Teorema 59 *L'immagine di una trasformazione lineare è un sottospazio. In particolare, contiene sempre il vettore nullo.*

Dim. Siano infatti $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ due vettori dell'immagine. Si deve provare che per ogni α e per ogni β il vettore $\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2$ è ancora nell'immagine.

Indichiamo con A la trasformazione e siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ tali che

$$\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1\,, \qquad \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2\,.$$

La linearità di A mostra che

$$\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) \in \operatorname{im} A\,. \quad \blacksquare$$

Consideriamo ora *l'insieme degli zeri* di una trasformazione lineare A. Questo insieme si chiama il NUCLEO di A e si indica col simbolo "ker", ossia

$$\ker A = \{x \mid Ax = 0\}\,.$$

Ovviamente, *il nucleo di una trasformazione lineare non è mai vuoto:* esso contiene sempre almeno l'elemento nullo perchè

$$A0 = A(\alpha 0) = \alpha A0 \quad \text{per ogni } \alpha\ :$$

Scegliendo $\alpha = 0$ si trova $A0 = 0$.

Si ha:

Teorema 60 *Il nucleo di una trasformazione lineare è un sottospazio.*

Dim. Sia infatti $A\mathbf{x}_1 = 0$, $A\mathbf{x}_2 = 0$. Vale

$$A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = 0\,. \quad \blacksquare$$

Si noti il corrispondente in $\mathbb{R}^3$ dei due teoremi precedenti: i sottospazi immagini di trasformazioni lineari sono rette o piani per l'origine, come si è già notato; e questo dà la *rappresentazione parametrica delle rette e dei piani per l'origine.* Consideriamo la rappresentazione cartesiana di una retta per l'origine,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Questa condizione dice che i vettori $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ che appartengono alla retta verificano

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

e sono quindi gli elementi del nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, si veda il paragrafo 1.11.2.
Analogamente, i punti del piano la cui equazione cartesiana è

$$ax + by + cz = 0$$

verificano

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

e costituiscono il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$. Si confronti col paragrafo 1.10.1.

Ci si può chiedere se una trasformazione lineare è iniettiva o meno. Vale:

Teorema 61 *Una trasformazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene il solo elemento nullo.*

Dim. Se A è iniettiva allora $A\mathbf{x} \neq 0$ quando $\mathbf{x} \neq 0$ e quindi $\ker A = 0$. Viceversa, sia $\ker A = 0$ e siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ tra loro diversi. Allora, $A\mathbf{x}_1 \neq A\mathbf{x}_2$. Altrimenti, avremmo $0 = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ con $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq 0$. $\blacksquare$

In particolare,

Teorema 62 *Se A è iniettiva trasforma una base del suo spazio di partenza in una base di* im$A$. *In particolare, la dimensione della sua immagine è uguale alla dimensione del suo spazio di partenza.*

Se l'immagine di una base, mediante la trasformazione lineare A, è un insieme linearmente indipendente allora A è iniettiva.

Dim. Sia $\ker A = 0$ e sia $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ una base dello spazio di partenza. Se

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{x}_i = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

segue $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = 0$ perchè $\ker A = 0$ e quindi $\alpha_i = 0$ perché $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ è una base. I vettori $A\mathbf{x}_i$ sono quindi linearmente indipendenti e inoltre generano im$A$ perché se $\mathbf{y} \in$ im$A$ allora

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A\mathbf{x}_i\,.$$

Proviamo l'ultima affermazione del teorema. Sia per questo $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ una base dello spazio lineare su cui A è definito e supponiamo che l'insieme $\{A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_r\}$ sia linearmente indipendente. Dobbiamo mostrare che se $A\mathbf{x} = 0$ allora $\mathbf{x} = 0$, si veda il Teorema 61. Rappresentiamo

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

così che

$$0 = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A\mathbf{x}_i\,.$$

Per ipotesi i vettori $A\mathbf{x}_i$ sono linearmente indipendenti e quindi gli α_i sono tutti zero. Dunque, $\mathbf{x} = 0$, ossia $\ker A = 0$. Dal Teorema 61 segue che A è iniettiva. ∎

In particolare, *nessuna trasformazione lineare da uno spazio di dimensione maggiore in uno di dimensione minore può essere iniettiva.* Più precisamente:

Teorema 63 *Se A: $\Phi^n \mapsto \Phi^m$ è iniettiva allora $m \geq n$; se è suriettiva allora $m \leq n$.*
Se A: $\Phi^n \mapsto \Phi^m$ è sia iniettiva che suriettiva allora $m = n$.

Quando A: $\Phi^n \mapsto \Phi^n$ è sia iniettiva che suriettiva, la sua TRASFORMAZIONE INVERSA si indica col simbolo A^{-1}.

Si verifica facilmente che $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ e che la trasformazione inversa di una trasformazione lineare è essa stessa lineare.

Sia A una trasformazione lineare da Φ^n in Φ^m e sia X un sottospazio di Φ^n. La restrizione di A ad X è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale X in Φ^m.

Supponiamo che $\ker A \neq 0$, ossia che A non sia iniettiva, e scegliamo come sottospazio X di Φ^n un complementare di $\ker A$. Si ricordi che tutti i complementari hanno la stessa dimensione. In questo caso, se ν è la dimensione di $\ker A$, tutti i suoi complementari hanno dimensione $n - \nu$.

Se $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{y} \neq 0$, allora $A\mathbf{y} \neq 0$ e quindi A è iniettiva da Y in Φ^m. Dunque, l'immagine di A ha dimensione $n - \nu$. Si è così provato:

Teorema 64 *In Φ^n vale*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = n\,.$$

Un caso particolare è il caso in cui A: $\Phi^n \mapsto \Phi$. Essendo questo un caso di particolare importanza, enunciamo esplicitamente:

Corollario 65 *Sia A una trasformazione lineare, A: $\Phi^n \mapsto \Phi$. Se $A \neq 0$ allora $\ker A$ ha dimensione $n-1$ ed ogni complementare di $\ker A$ ha dimensione 1.*

Le trasformazioni (lineari o meno) di Φ^n che prendono valori nel campo scalare si chiamano FUNZIONALI ed I sottospazi di Φ^n il cui complementare ha dimensione 1 si chiamano IPERPIANI. Gli iperpiani sono tutti e soli i nuclei di funzionali lineari non nulli.

Infine consideriamo

$$\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$$

ossia la controimmagine di un elemento $\mathbf{y}$. Quest'insieme si indica col simbolo[4] $A^{-1}\mathbf{y}$. Quest'insieme è vuoto se $\mathbf{y}$ non appartiene all'immagine di A. Altrimenti:

Teorema 66 *Sia $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$. Si ha:*

$$A^{-1}\mathbf{y} = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \ker A\}\,.$$

<u>Dim</u>. Ovviamente, se $\mathbf{x} \in \ker A$,

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}\,.$$

Vicevera, sia $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}$ Allora,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

e $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \in \ker A$ perché

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{y} = 0\,. \quad \blacksquare$$

[4] da non confondere col simbolo A^{-1} usato per la trasformazione inversa.

Per esempio, sia A da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore fissato. L'insieme

$$A^{-1}d = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = d\}$$

è un generico piano (si veda il paragrafo 1.11).
Se A da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ è data da

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ vettori fissati, allora

$$A^{-1}\mathbf{d} = \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{d} \right\} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = d_1 \,, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = d_2\}$$

è una retta in posizione generica, si veda il paragrafo 1.11.

2.3.1 Rappresentazioni di trasformazioni lineari

Indichiamo con A una trasformazione lineare da Φ^n in Φ^m. La trasformazione A si assegna dando un modo per individuare l'elemento $\mathbf{y}$ che corrisponde ad un generico elemento $\mathbf{x}$ di Φ^n. Questo può farsi in questo modo: fissiamo una base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ di Φ^n e una base $\{\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m\}$ di Φ^m. Va sottolinearo che le basi sono *ordinate.*

Notiamo prima di tutto che

Lemma 67 *La trasformazione* lineare A *è identificata dai vettori* $\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i$ *nei quali vengono trasformati gli elementi* $\mathbf{x}_i$ *della base di* Φ^n.

Dim. Si rappresenti un generico elemento $\mathbf{x} \in \Phi^n$ come

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n \,.$$

Allora,

$$A\mathbf{x} = A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1(A\mathbf{x}_1) + \alpha_2(A\mathbf{x}_2) + \cdots + \alpha_n(A\mathbf{x}_n) \,. \quad \blacksquare$$

Ciascuno degli elementi $A\mathbf{x}_i$ ha la sua rappresentazione rispetto alla base $\{\hat{\mathbf{x}}_i\}$ scelta in Φ^m:

$$A\mathbf{x}_i = a_{1\,i}\hat{\mathbf{x}}_1 + a_{2\,i}\hat{\mathbf{x}}_2 + \cdots + a_{m\,i}\hat{\mathbf{x}}_m \tag{2.5}$$

(si noti l'ordine in cui si susseguoni gli indici: abbiamo scritto $a_{1\,i}$, $a_{2\,i}$,..., e non $a_{i\,1}$, $a_{i\,2}$,... E si somma rispetto al *primo* indice).

Ricapitoliamo:

1. assegnata la base ordinata $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ in Φ^n, un elemento $\mathbf{x} \in \Phi^n$ è identificato dalla sequenza ordinata delle sue componenti α_i, $1 \le i \le n$ rispetto a tale base;

2. assegnata la base ordinata $\{\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_m\}$ in Φ^m, un elemento di Φ^m è identificato dalla sequenza ordinata delle sue componenti $\hat{\alpha}_j$, $1 \le j \le m$ rispetto a tale base;

3. La trasformazione lineare A è rappresentata dalle sequenze ordinate di numeri $\{a_{1\,i}\,,\ a_{2\,i}\,,\ \dots\,,\ a_{m\,i}\}$, sequenze che a loro volta vanno ordinate al crescere dell'indice i.

   Si noti: per ordinare gli elementi di un insieme $\{a_{i\,j}\}$ di numeri prima rispetto ad un indice e poi rispetto all'altro basta farne una matrice.

4. una volta fatte queste osservazioni si capisce che per identificare una trasformazione A è sufficiente dare un modo per calcolare le componenti di $A\mathbf{x}$ nella base di Φ^m a partire dalle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla assegnata base di Φ^n; e il calcolo si farà assumendo noto A, ossia, grazie al Lemma 67, assumendo noti i numeri $a_{i\,j}$ opportunamente disposti in una matrice.

Osservazione 68 Notiamo che nel modo che abbiamo descritto per rappresentare la trasformazione A, il fatto che lo spazio di partenza sia $H = \Phi^n$ e quello di arrivo sia $K = \Phi^m$ non ha nessun ruolo: gli stessi argomenti si applicano, senza nessun cambiamento, a trasformazioni lineari tra coppie di spazi vettoriali di dimensione finita indipendentemente da chi siano i loro elementi. Un esempio importante anche per le applicazioni alla fisica ed all'ingegneria si ha quando H è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più $n-1$ (che ha dimensione n) sull'intervallo $[0, \pi]$ mentre K è lo spazio lineare una cui base è data dalle funzioni $\{\sin kx\}_{1 \le k \le m}$ ancora con $x \in (0, \pi)$.

Procediamo ora a rappresentare la trasformazione A.

Dato un generico vettore $\mathbf{x} \in \Phi^n$,

$$\text{sia } \ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \text{ e sia } A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \hat{\mathbf{x}}_j\,.$$

Vogliamo calcolare i numeri $\hat{\alpha}_j$ a partire dai numeri α_i e dai coefficienti $a_{j\,i}$ in (2.5). Si procede come segue: si scrive

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{x}_i \qquad \text{(usiamo (2.5))} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{m} a_{j\,i} \hat{\mathbf{x}}_j\right] = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{j\,i} \alpha_i\right] \hat{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \hat{\mathbf{x}}_j\,. \end{aligned}$$

segue da qui che

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

In questo senso, l'azione di A si rappresenta mediante la matrice

$$M_A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Si osservi che:

1. la matrice M_A è stata costruita a partire dalle assegnate *basi ordinate* $\{\mathbf{x}_i\}$, $\{\hat{\mathbf{x}}_i\}$.

2. la colonna i–ma di M_A è la colonna delle componenti di $\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i$ rispetto agli elementi della base $\{\hat{\mathbf{x}}_i\}$.

3. sia A una trasformazione lineare da Φ^n in Φ^m e sia B una trasformazione lineare da Φ^m in Φ^k. Fissiamo le basi nei tre spazi, e le due matrici M_A ed M_B che rappresentano le trasformazioni A e B. La matrice M_{BA} che rappresenta la *trasformazione composta* BA, che è ancora lineare, è la matrice $M_B M_A$.

4. la trasformazione lineare A è iniettiva se e solo se è iniettiva la sua matrice; ossia se e solo se M_A trasforma $[\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n\ ]^T$ in $[\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ ]^T$ solamente quando ogni α_i è nullo.

5. in particolare, la trasformazione lineare A è invertibile, ossia iniettiva e suriettiva, se esiste una trasformazione B tale che $AB\mathbf{x} = BA\mathbf{x} = \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x}$. e quindi se e solo se esiste una matrice M_B tale che

   $$M_B M_A = M_A M_B = I$$

   ove I è la matrice identità e il prodotto tra matrici si esegue righe per colonne. Dunque, $M_{A^{-1}} = (M_A)^{-1}$.

6. una trasformazione lineare a valori nel campo scalare, ossia un funzionale, è rappresentata da una matrice con *una riga ed n colonne.*

Conviene sottolineare esplicitamente la proprietà 5:

Teorema 69 *La trasformazione A da Φ^n in sé è invertibile se e solo se è invertibile la sua rappresentazione matriciale M_A rispetto ad una qualsiasi base.*

Osservazione 70 In pratica non si usa il simbolo M_A, "matrice che corrisponde alla trasformazione lineare A". Invece di scrivere M_A si scrive direttamente A indicando con lo stesso simbolo sia la trasformazione che la sua matrice. E' però importante capire bene che si tratta di oggetti diversi: A, come trasformazione, si specifica dicendo quale elemento $\mathbf{y}$ corrisponde ad un qualsiasi elemento $\mathbf{x}$. $A = M_A$ raggiunge lo stesso scopo *scelte le basi ordinate negli spazi di partenza e d'arrivo.* Cambiando anche solo una delle basi, senza cambiare la trasformazione A, la rappresentazione matriciale M_A cambia. Mostriamo questo studiando un esempio. ∎

Esempio 71 Ricordiamo che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ sono le coppie ordinate (a, b) di numeri reali. Consideriamo la trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita come segue:

$$A(a, b) = a\,.$$

Cerchiamone la rappresentazione matriciale rispetto ad assegnate basi di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}$.

Consideriamo prima di tutto la rappresentazione rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ e rispetto alla base canonica $\tilde{\mathbf{e}}_1$ di $\mathbb{R}$. Si ha

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1)\,, \qquad \tilde{\mathbf{e}}_1 = 1\,.$$

Dunque si ha

$$\mathbf{x} = (a, b) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2\,, \qquad A\mathbf{x} = A(a, b) = a = a\tilde{\mathbf{e}}_1\,..$$

Si vede da qui che rispetto alle due basi canoniche la matrice M_A è

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scegliamo ora in $\mathbb{R}^2$ la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ con

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1\,, \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,.$$

Si ha

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = (\alpha + \beta, \beta)$$

e

$$A(\alpha + \beta, \beta) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta)\tilde{\mathbf{e}}_1 \quad \text{cosí che} \quad M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

la matrice della trasformazione cambia cambiando la base nello spazio di partenza.

Essa cambia anche cambiando la base nello spazio di arrivo. Sia infatti $\mathbb{R}^2$ riferito alla base canonica ed $\mathbb{R}$ riferito alla base $\hat{\mathbf{x}}_1 = 2\hat{\mathbf{e}}_1$. Si ha:

$$A(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) = \alpha = (\alpha/2)\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \text{così che} \quad M_A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad ∎$$

Una conseguenza importante dell'Esempio 71 è che non ha senso dire che una trasformazione lineare A è rappresentata da una certa matrice se non si sono prima fissate basi ordinate nello spazio di partenza e nello spazio di arrivo. Ciò nonostante, la trasformazione identità, quella che ad ogni $\mathbf{x}$ fa corrispondere sé stesso, è rappresentata dalla matrice identità rispetto ad ogni base. Analogamente, la trasformazione che ad ogni $\mathbf{x}$ fa corrispondere 0 è rappresentata dalla matrice nulla in ogni base.

2.4 Cambiamenti di coordinate

Fissiamo due basi dello stesso spazio lineare Φ^n. Siano esse

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{x}_1\,,\ldots\,,\mathbf{x}_n\} \quad \text{(prima base)} \\ &\{\mathbf{v}_1\,,\ldots\,,\mathbf{v}_n\} \quad \text{(seconda base)}\,. \end{aligned}$$

Rappresentiamo lo stesso vettore $\mathbf{x}$ rispetto all'una ed all'altra base:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\,, \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i\,.$$

Vogliamo trovare la relazione che intercorre tra le coordinate α_i di $\mathbf{x}$ rispetto alla prima base e le coordinate β_i del medesimo vettore (o punto!) $\mathbf{x}$ rispetto alla seconda base. Più precisamente: supponiamo di conoscere le coordinate β_i di $\mathbf{x}$ rispetto alla seconda base. Vogliamo calcolare quelle rispetto alla prima base.

Rappresentiamo ogni elemento della seconda base rispetto alla prima base:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{r=1}^{n} c_{r\,i} \mathbf{x}_r$$

(si noti che abbiamo scritto $c_{r\,i}$ e non $c_{i\,r}$ e che la somma si fa sul primo indice, mentre il secondo è fissato). Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \mathbf{x}_r &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left[\sum_{r=1}^{n} c_{r\,i} \mathbf{x}_r \right] &= \sum_{r=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} c_{r\,i} \beta_i \right] \mathbf{x}_r\,. \end{aligned}$$

Dunque, le coordinate α_r di $\mathbf{x}$ rispetto alla prima base si calcolano dalle coordinate rispetto alla seconda base come segue:

$$\alpha_r = \sum_{i=1}^{n} c_{r\,i} \beta_i\,.$$

Scrivendo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_{1\,1} & c_{1\,2} & \dots & c_{1\,n} \\ c_{2\,1} & c_{2\,2} & \dots & c_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ c_{n\,1} & c_{n\,2} & \dots & c_{n\,n} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

La matrice C in (2.6) si chiama MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE o anche MATRICE DI PASSAGGIO: passaggio dalle coordinate, note, di un vettore nella seconda base a quelle nella prima base, che sono da calcolare. Si dice anche che la matrice rappresenta un CAMBIAMENTO DI COORDINATE.

Si noti che la colonna $i - ma$ della matrice C è la colonna delle componenti del vettore $\mathbf{v}_i$ rispetto alla base $\{\mathbf{x}_j\}$.

I cambiamenti di coordinate sono invertibili e quindi la matrice C è invertibile. La matrice di passaggio dalle coordinate, assunte come note, nella prima base alle coordinate, da calcolare, nella seconda è la matrice C^{-1}.

Osservazione 72 Va notata la similitudine di questi argomenti con quelli del paragrafo 2.3.1. La similitudine non è casuale. Quello che qui abbiamo fatto è di rappresentare la trasformazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, ossia l'identità tra $H = \Phi^n$ e $K = \Phi^m$ con $m = n$ ma dotato di una base diversa. ∎

Sia ora assegnata una trasformazione lineare A da Φ^n a Φ^m. Si sa che, assegnate basi ordinate in Φ^n e in Φ^m, essa è rappresentata da una matrice M_A. Abbiamo visto all'Esempio 71 che la matrice M_A cambia sia cambiando la base nello spazio di partenza che in quello di arrivo. Vogliamo calcolare come varia la rappresentazione di M_A al cambiare delle basi. Per questo siano assegnate le basi

$$\text{due basi in } \Phi^n\text{:} \quad \begin{cases} \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \\ \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \end{cases}$$
$$\text{due basi in } \Phi^m\text{:} \quad \begin{cases} \{\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_m\} \\ \{\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_m\} \end{cases}$$

(si noti che queste notazioni sono consistenti con quelle usate al paragrafo 2.3.1).

Introduciamo le seguenti notazioni:

1. La matrice M_A rappresenta l'operatore lineare A quando le basi sono rispettivamente $\{\mathbf{x}_i\}$ in partenza e $\{\hat{\mathbf{x}}_j\}$ in arrivo.

2. La matrice $\underline{\mathcal{M}}_A$ rappresenta l'operatore lineare A quando le basi sono rispettivamente $\{\mathbf{v}_i\}$ in partenza e $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$ in arrivo.

3. notazioni per i vettori:

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{x} & = & \sum_{r=1}^n \alpha_r \mathbf{x}_r & = & \sum_{r=1}^n \beta_r \mathbf{v}_r \\ A\mathbf{x} & = & \sum_{r=1}^n \hat{\alpha}_r \hat{\mathbf{x}}_r & = & \sum_{r=1}^n \hat{\beta}_r \hat{\mathbf{v}}_r \end{array} \qquad \begin{cases} [\alpha_r] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \\ [\beta_r] = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\hat{\alpha}_r] = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \cdots & \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \\ [\hat{\beta}_r] = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \cdots & \hat{\beta}_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

4. Con C e $\hat{C}$ indichiamo le matrici di passaggio tra le basi di Φ^n e quelle di Φ^m:

$$[\alpha_r]^T = C[\beta_r]^T\,, \qquad [\hat{\alpha}_r]^T = \hat{C}[\hat{\beta}_r]^T\,. \tag{2.7}$$

Vogliamo trovare un modo per passare da M_A ad $\underline{\mathcal{M}}_A$ note le due matrici di passaggio. Ricordiamo

$$[\hat{\alpha}_r]^T = M_A[\alpha_r]^T\,, \qquad [\hat{\beta}_r]^T = \underline{\mathcal{M}}_A[\beta_r]^T$$

Usando (2.7) si ha:

$$[\hat{\alpha}_r]^T = M_A[\alpha_r]^T = M_A C[\beta_r]^T\,, \qquad [\hat{\beta}_r]^T = \hat{C}^{-1}[\hat{\alpha}_r]^T = \hat{C}^{-1} M_A C[\beta_r]^T$$

e quindi

$$\underline{\mathcal{M}}_A = \hat{C}^{-1} M_A C\,.$$

Notiamo un caso particolarmente importante: sia $m = n$ e sia $\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_i$ $\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i$; ossia, A è un endomorfismo e vogliamo trovare come cambia la sua rappresentazione matriciale al cambiare della base nel medesimo spazio.

Notiamo che in questo caso $C = \hat{C}$ e quindi

$$\underline{\mathcal{M}}_A = C^{-1} M_A C\,.$$

2.5 Matrici invertibili: costruzione della matrice inversa

Ricordiamo il Teorma di Binet, Teorema 7: se A e B sono due matrici $n \times n$ allora

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)\,.$$

Si calcola immediatamente che $\det I = 1$ e quindi se $AB = I$ vale

$$1 = (\det A)(\det B)\,.$$

Dunque, *il determinante di una matrice invertibile è diverso da zero e il determinante della matrice inversa di A è il reciproco del determinante di A:*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,.$$

In realtà vale anche l'affermazione inversa,

Teorema 73 *Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.*

Mostriamo come si costruisce la matrice inversa di una matrice A con $\det A \neq 0$.

La costruzione è suggerita dalle regole sui determinanti che abbiamo presentato, ma non provato, al paragrafo 1.1.4 e che qui ripetiamo:

1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots a_{2\,n} \\ \vdots & & \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$
Il determinante di A si definisce in modo iterativo come segue: si fissa l'attenzione sugli elementi dei una riga, diciamo della riga s. All'elemento $a_{s\,j}$ si associa il numero $d_{s\,j}$ che è il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ che si ottiene da A cancellando la riga e la colonna che contengono $a_{s\,j}$, ossia la riga s e la colonna j. Per definizione,
$$\begin{aligned}\det A = a_{s\,1}[(-1)^{s+1}d_{s\,1}] + a_{s\,2}[(-1)^{s+2}d_{s\,2}] + a_{s\,3}[(-1)^{s+3}d_{s\,3}] \\ + \dots + a_{s\,j}[(-1)^{s+j}d_{s\,j}] + \dots + a_{s\,n}[(-1)^{s+n}d_{s\,n}]\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$
In questo modo il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ è ricondotto al calcolo di quello di una matrice $(n-1)\times(n-1)$. Iterando il procedimento si arriva al calcolo del determinante di matrici 2×2, che si è già definito.

   Il calcolo dei numeri $d_{s\,i}$ verrà illustrato con maggiori dettagli nel corso della descrizione della matrice inversa.

2. Si può provare che il valore trovato non dipende dalla riga prescelta e che al medesimo valore si giunge lavorando, in modo analogo, sugli elementi di una colonna;

3. Scambiando due righe il determinante cambia segno;

4. scambiando due colonne il determinante cambia segno;

5. una matrice con una riga oppure una colonna nulla ha determinante nullo;

6. aggiungendo ad una riga i multipli degli elementi di un'altra riga, il determinante non cambia. E quindi se due righe sono proporzionali il determinante è nullo;

7. aggiungendo ad una colonna i multipli degli elementi di un'altra colonna, il determinante non cambia. E quindi se due colonne sono proporzionali il determinante è nullo.

Illustriamo la regola per la costruzione di A^{-1} quando

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,j} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,j} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i\,1} & a_{i\,2} & a_{i\,3} & \dots & a_{i\,j} & \dots & a_{i\,n-1} & a_{i\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,j} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \dots & a_{n\,j} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Fissiamo l'attenzione sul generico elemento $a_{i\,j}$ e consideriamo la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j. Indicando col simbolo "$\bullet$" gli elementi soppressi, queste matrici sono:

1. se $i = 1$ e $j = 1$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \bullet & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,j} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ \bullet & a_{i\,2} & a_{i\,3} & \dots & a_{i\,j} & \dots & a_{i\,n-1} & a_{i\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ \bullet & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,j} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ \bullet & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \dots & a_{n\,j} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

   Si noti che la matrice che vogliamo considerare è $(n-1) \times (n-1)$. Riga e colonna i cui elementi sono indicati con "$\bullet$" si conservano per memoria, ma in realtà "non esistono".

   Indichiamo con $A_{1\,1}$ il determinante di questa matrice.

2. Se $i = 1$ e $j = 2$ la matrice che si considera è

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ a_{2\,1} & \bullet & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & \bullet & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,j} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i\,1} & \bullet & a_{i\,3} & \dots & a_{i\,j} & \dots & a_{i\,n-1} & a_{i\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n-1\,1} & \bullet & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,j} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & \bullet & a_{n\,3} & \dots & a_{n\,j} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

   Indichiamo con $A_{1\,2}$ il *prodotto* di $(-1)^{1+2}$ per il determinante di questa matrice (ancora $(n-1) \times (n-1)$: gli elementi sostituiti da "$\bullet$" *non esistono*).

3. alla generica posizione $(i\,j)$ associamo la matrice $(n-1)\times(n-1)$ data da:

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & \bullet & \dots & a_{1\;n-1} & a_{1\;n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & \bullet & \dots & a_{2\;n-1} & a_{2\;n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & \bullet & \dots & a_{3\;n-1} & a_{3\;n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i-1\;1} & a_{i-1\;2} & a_{i-1\;3} & \dots & \bullet & \dots & a_{i-1\;n-1} & a_{i-1\;n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ a_{i+1\;1} & a_{i+1\;2} & a_{i+1\;3} & \dots & \bullet & \dots & a_{i+1\;n-1} & a_{i+1\;n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n-1\;1} & a_{n-1\;2} & a_{n-1\;3} & \dots & \bullet & \dots & a_{n-1\;n-1} & a_{n-1\;n} \\ a_{n\;1} & a_{n\;2} & a_{n\;3} & \dots & \bullet & \dots & a_{n\;n-1} & a_{n\;n} \end{bmatrix}.$$

Indichiamo con $A_{i\,,j}$ il *prodotto di* $-1^{(i+j)}$ *per il determinante di questa matrice.*

Confrontando con (2.8) si vede che

$A_{i\,,j} = (-1)^{i+j} d_{i\,j}$ *sono i numeri che compaiono nella definizione del determinante*.

4. Infine, se $i = n$ e $j = n$ si considera la matrice $(n-1)\times(n-1)$ data da:

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\;j} & \dots & a_{1\;n-1} & \bullet \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\;j} & \dots & a_{2\;n-1} & \bullet \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\;j} & \dots & a_{3\;n-1} & \bullet \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i\;1} & a_{i\;2} & a_{i\;3} & \dots & a_{i\;j} & \dots & a_{i\;n-1} & \bullet \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n-1\;1} & a_{n-1\;2} & a_{n-1\;3} & \dots & a_{n-1\;j} & \dots & a_{n-1\;n-1} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice si indica col simbolo $A_{n\,n}$.

Il numero $A_{i\,j}$ si chiama il COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento $a_{i\,j}$.

Ora costruiamo la matrice $n\times n$ dei complementi algebrici

$$\begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & A_{1\,3} & \dots & A_{1\;j} & \dots & A_{1\;n-1} & A_{1\;n} \\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & A_{2\,3} & \dots & A_{2\;j} & \dots & A_{2\;n-1} & A_{2\;n} \\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & A_{3\,3} & \dots & A_{3\;j} & \dots & A_{3\;n-1} & A_{3\;n} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{i\;1} & A_{i\;2} & A_{i\;3} & \dots & A_{i\;j} & \dots & A_{i\;n-1} & A_{i\;n} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{n-1\;1} & A_{n-1\;2} & A_{n-1\;3} & \dots & A_{n-1\;j} & \dots & A_{n-1\;n-1} & A_{n-1\;n} \\ A_{n\;1} & A_{n\;2} & A_{n\;3} & \dots & A_{n\;j} & \dots & A_{n\;n-1} & A_{n\;n} \end{bmatrix}.$$

Consideriamo quindi la *trasposta* di questa matrice e calcoliamo il suo prodotto per A:

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,j} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,j} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i\,1} & a_{i\,2} & a_{i\,3} & \dots & a_{i\,j} & \dots & a_{i\,n-1} & a_{i\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,j} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \dots & a_{n\,j} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix} .$$

$$. \begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{2\,1} & A_{3\,1} & \dots & A_{j\,1} & \dots & A_{n-1\,1} & A_{n\,1} \\ A_{1\,2} & A_{2\,2} & A_{3\,2} & \dots & A_{j\,2} & \dots & A_{n-1\,2} & A_{n\,2} \\ A_{1\,3} & A_{2\,3} & A_{3\,3} & \dots & A_{j\,3} & \dots & A_{n-1\,3} & A_{n\,3} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{1\,i} & A_{2\,i} & A_{3\,i} & \dots & A_{j\,i} & \dots & A_{n-1\,i} & A_{n\,i} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{1\,n-1} & A_{2\,n-1} & A_{3\,n-1} & \dots & A_{j\,n-1} & \dots & A_{n-1\,n-1} & A_{n\,n-1} \\ A_{1\,n} & A_{2\,n} & A_{3\,n} & \dots & A_{j\,n} & \dots & A_{n-1\,n} & A_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Ora usiamo le seguenti proprietà del prodotto delle due matrici:

1. L'elemento in posizione $(1\,1)$ della matrice prodotto è

$$a_{1\,1}A_{1\,1} + a_{1,2}A_{1\,2} + \cdots + a_{1\,j}A_{1\,j} + \cdots a_{1\,n}A_{1\,n} = \det A\,,$$

   si veda la (2.8). La matrice dei complementi algebrici è stata trasposta proprio per ottenere questo risultato.

2. Analogamente si vede che gi elementi diagonali della matrice prodotto sono tutti uguali a $\det A$.

3. Consideriamo ora l'elemento in posizione $(i\,j)$ della matrice prodotto, con $i \neq j$. Per calcolarlo, osserviamo quanto segue:

   (a) il complemento algebrico degli elementi di una riga *dipende solo dalle altre righe: non muta cambiando gli elementi della riga in questione.*

   (b) ricordiamo che se ad una riga di A si somma una qualsiasi altre riga, il determinante non cambia. Per esempio, sommiamo alla prima riga la seconda riga. Questo non cambia né il determinante né i complementi algebrici e quindi

$$\det A = a_{1\,1}A_{1\,1} + a_{1\,2}A_{1\,2} + \cdots + a_{1\,j}A_{1\,j} + \cdots a_{1\,n}A_{1\,n} =$$
$$(a_{1\,1}+a_{2\,1})A_{1\,1}+(a_{1\,2}+a_{2\,2})A_{1\,2}+\cdots+(a_{1\,j}+a_{2\,j})A_{1\,j}+\cdots(a_{1\,n}+a_{2\,n})A_{1\,n}$$

ossia

$$a_{2\,1}A_{1\,1} + a_{2\,2}A_{1\,2} + \cdots + a_{2\,j}A_{1\,j} + \cdots + a_{2\,n}A_{1\,n} = 0\,.$$

Questa osservazione si può ripetere per ogni coppia di righe e quindi:

Teorema 74 *la somma dei prodotto degli elementi di una riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti* ma di una riga diversa *vale* 0.

Dunque tutti gli elementi $c_{i\,j}$ della matrice prodotto, con $i \neq j$, sono nulli.

Si trova così che la matrice prodotto è la matrice $(\det A)I$.

Le proprietà appena dette mostrano che :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{2\,1} & A_{3\,1} & \dots & A_{j\,1} & \dots & A_{n-1\,1} & A_{n\,1} \\ A_{1\,2} & A_{2\,2} & A_{3\,2} & \dots & A_{j\,2} & \dots & A_{n-1\,2} & A_{n\,2} \\ A_{1\,3} & A_{2\,3} & A_{3\,3} & \dots & A_{j\,3} & \dots & A_{n-1\,3} & A_{n\,3} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{1\,i} & A_{2\,i} & A_{3\,i} & \dots & A_{j\,i} & \dots & A_{n-1\,i} & A_{n\,i} \\ \vdots & & & & & & & \\ A_{1\,n-1} & A_{2\,n-1} & A_{3\,n-1} & \dots & A_{j\,n-1} & \dots & A_{n-1\,n-1} & A_{n\,n-1} \\ A_{1\,n} & A_{2\,n} & A_{3\,n} & \dots & A_{j\,n} & \dots & A_{n-1\,n} & A_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Ciò mostra in particolare che se $\det A \neq 0$ *allora la matrice* A^{-1} *può costruirsi.*
In particolare:

Corollario 75 *Sia* $\{\mathbf{x}_i\}$ *un insieme di* n *vettori di* Φ^n,

$$\mathbf{x}_i = a_{i\,1}\mathbf{e}_1 + \cdot + a_{i\,n}\mathbf{e}_n \qquad (\{\mathbf{e}\} \text{ base canonica di } \Phi^n)\ .$$

L'insieme $\{\mathbf{x}_i\}$ *è una base di* Φ^n *se e solo se* $\det[a_{i\,j}] \neq 0$.

Osservazione 76 La costruzione della matrice inversa è alquanto complessa e, nel caso di matrici $n \times n$ con n molto grande, come si incontrano spesso in pratica, è anche assai delicata numericamente. Noi non vogliamo trattare questo problema ma si capisce facilmente che se alcuni elementi sono dell'ordine di 10^4 e alcuni dell'ordine di 10^{-4}, questi ultimi verranno trascurati. E però potrebbe essere che il determinante sia diverso da zero proprio grazie a questo elementi, come nel caso della matrice

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 10^4 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

C'è un caso però in cui il calcolo della matrice inversa è immediato. E' il caso delle matrici ortogonali. Infatti l'inversa di una matrice ortogonale coincide con la trasposta. ∎

2.6 Endomorfismi, autovalori ed autovettori

Ricordiamo che useremo Φ per indicare $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Molto di ciò che diremo vale indifferentemente in $\mathbb{R}^n$ oppure in $\mathbb{C}^n$ ma in certi casi la scelta dell'uno o dell'altro spazio non è indifferente. In questi casi si userà esplicitamente la notazione $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ e quindi anche $\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$. Inoltre, nel paragrafo 2.12 torneremo a studiare un argomento di geometria analitica ed allora assumeremo esplicitamente di lavorare in $\mathbb{R}^2$ oppure in $\mathbb{R}^3$.

Rappresentiamo Φ^n rispetto ad una base ordinata $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ e sia A una trasformazione lineare da Φ^n in sé. Dunque Φ^n è sia lo spazio di partenza che lo spazio d'arrivo della trasformazione A. Talvolta conviene rappresentare Φ^n rispetto a due basi diverse, una usata per rappresentare i vettori $\mathbf{x}$ su cui A agisce e l'altra usata per rappresentare le loro immagini. Invece, supponiamo ora che lo spazio Φ^n sia rappresentato rispetto alla *medesima* base $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ sia come spazio di partenza che come spazio di arrivo della trasformazione lineare A. In questo caso la trasformazione lineare A si chiama anche un ENDOMORFISMO di Φ^n.

Indichiamo con M_A la matrice che rappresenta l'endomorfismo A rispetto alla base prescelta $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$.

Come si è visto al Teorema 73, l'endomorfismo A, e quindi la corrispondente matrice M_A, è invertibile se e solo se

$$\det M_A \neq 0\,.$$

In questo caso l'equazione $A\mathbf{x} = 0$ ammette la sola soluzione $\mathbf{x} = 0$. In molte applicazioni è importante lo studio dell'equazione

$$(zI - A)\mathbf{x} = 0\,, \tag{2.9}$$

ove z è un parametro ed I è la TRASFORMAZIONE IDENTITÀ, quella che ad un vettore $\mathbf{x}$ associa sé stesso,

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x}\,.$$

Dunque,

$$zI\mathbf{x} = z\mathbf{x}\,.$$

Il problema consiste nell'identificare i valori di z per cui l'equazione ammette soluzioni $\mathbf{x}$ *non nulle.*

Esempio 77 Sia $[zI - A]\mathbf{x} = 0$. E' facile vedere che

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}e^{zt}$$

risolve il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}\,. \quad \blacksquare$$

Quest'esempio mostra che lo studio dell'equazione l'equazione

$$(zI - A)\mathbf{x} = 0 \tag{2.10}$$

è importante anche per le applicazioni della geometria alla fisica o all'ingegneria.

> Sottolineiamo che il parametro z in (2.9) deve essere un numero complesso anche se A è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. E quindi in generale un vettore $\mathbf{x}$ per cui vale (2.9) dovrà appartenere a $\mathbb{C}^n$. Per dare un significato rigoroso alla (2.9) è necessario un procedimento detto di "complessificazione" studiato nei dettagli al paragrafo (2.6.1).

I numeri per cui esiste $\mathbf{x} \neq 0$ che risolve (2.10) sono le radici dell'equazione algebrica

$$p(z) = \det(zI - M_A) = 0\,. \tag{2.11}$$

Si noti che:

1. $p(z)$ è un polinomio di grado n.
2. il coefficiente di z^n è 1.
3. Se gli elementi di M_A sono reali anche i coefficienti di $p(z)$ sono reali.

Si noti che M_A è la rappresentazione matriciale di A e $zI - M_A$ è la rappresentazione matriciale di $zI - A$. La matrice M_A dipende dalla scelta della base[5]. Però si sa dal Teorema 69 che $zI - A$ è invertibile se e solo se $zI - M_A$ lo è. Quindi, gli autovettori e gli autovalori *dipendono solo da A e non dalla sua rappresentazione matriciale.* Si proverà di più: il polinomio $p(z)$ in (2.11) dipende da A e non dalla base usata per rappresentare la trasformazione con la matrice M_A. Grazie a ciò, il polinomio $p(z)$ si chiama il POLINOMIO CARATTERISTICO DI A e i suoi zeri si chiamano gli AUTOVALORI dell'endomorfismo A. Se z è un autovalore, ogni $\mathbf{x} \neq 0$ che verifica (2.10) si chiama un AUTOVETTORE DELL'AUTOVALORE z O CHE APPARTIENE, O CHE È RELATIVO, ALL'AUTOVALORE z.

Sottolineiamo il fatto che, per definizione, gli autovettori sono vettori non nulli.

Per completare queste definizioni, proviamo che il polinomio caratteristico non muta cambiando la base di Φ^n. Si sa infatti che un cambiamento di base viene descritto da una qualsiasi matrice invertibile. Dal teorema di Binet si ha:

$$\begin{aligned}&\det(zI - PM_AP^{-1}) = \det(zPP^{-1} - PM_AP^{-1}) = \det P(zI - M_A)P^{-1}\\ &= (\det P)(\det P^{-1})\det(zI - M_A) = \det(zI - M_A)\,.\end{aligned}$$

Dunque, il polinomio caratteristico non muta cambiando il sistema di riferimento (ossia, esso dipende dall'endomorfismo A, e non dalla matrice con cui esso viene rappresentato in una certa base). Abbiamo così provato:

[5] si ricordi che la trasformazione identità: $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ è rappresentata dalla matrice identità in qualunque base.

Teorema 78 *Il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo sono invarianti sotto l'azione dei cambiamenti di coordinate.*

> Il teorema 78 è un'ulteriore ragione per seguire la notazione più comune di indicare con A invece che con M_A la matrice che rappresenta l'endomorfismo A (in una assegnata, ma spesso sottintesa, base ordinata).

Dato che il polinomio caratteristico dipende da A e non dalla sua rappresentazione matriciale, ci si può aspettare che i suoi coefficienti abbiano un ruolo importante. Ciò è effettivamente vero ma noi non studieremo questo problema. Diciamo solamente che i coefficienti che hanno una particolare importanza per le applicazioni sono quello di z^{n-1} e quello di z^0 , ossia il termine costante. Si ha:

Teorema 79

$$\text{il coefficiente di } z^{n-1} \text{ è } \begin{cases} \text{l'opposto della somma degli autovalori} \\ \text{a sua volta uguale a } -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \end{cases}$$

$$\text{il coefficiente di } z^{0} \text{ è } \begin{cases} \text{il prodotto degli autovalori moltiplicato per } (-1)^n \\ \text{a sua volta uguale a } (-1)^n \det A\,. \end{cases}$$

La somma degli elementi diagonali di una matrice si chiama la TRACCIA DELLA MATRICE.

L'insieme degli autovalori di un endomorfismo A o della sua rappresentazione matriciale si chiama lo SPETTRO DI A e si indica col simbolo $\sigma(A)$. Quando si studiano le proprietà dello spettro e degli autovettori di A si dice che se ne studiano le PROPRIETÀ SPETTRALI.

L'esempio seguente mostra che se anche $\Phi^n = \mathbb{R}^n$ e il polinomio $p(z)$ ha coefficienti reali, gli autovalori possono essere numeri complessi e che in generale non si trovano autovettori con elementi reali. Ciò giustifica lo studio del procedimento di "complessificazione" esposto nel prossimo paragrafo.

Esempio 80 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$z^2 + 1\,,$$

privo di radici reali. Ha però le due radici complesse $\pm i$ e ad esse corrispondono gli autovettori

$$\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.6.1 La complessificazione di trasformazioni lineari tra spazi reali

Sia A: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare. Spieghiamo in che senso questa trasformazione si applica a vettori complessi.

Se $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ allora

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I\,, \qquad \mathbf{v}_R \in \mathbb{R}^n\,,\ \mathbf{v}_I \in \mathbb{R}^n\,.$$

Per esempio

$$\text{se } \mathbf{v} = (1-i, 3, 4i) \text{ allora } \quad \begin{cases} \mathbf{v}_R &= (1,3,0) \\ \mathbf{v}_I &= (-1,0,4)\,. \end{cases}$$

Osservazione 81 (Sulla notazione) Scrivendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$$

intenderemo che v_R e v_I sono vettori reali. ∎

Naturalmente, un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ è anche un vettore di $\mathbb{C}^n$: è il vettore $\mathbf{v} + i0$. Lo chiameremo VETTORE REALE (DI $\mathbb{C}^n$). Inoltre, definiamo il CONIUGATO DI $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$. Il coniugato è

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_R - i\mathbf{v}_I\,.$$

Definiamo quindi

$$(a+ib)(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = a\mathbf{v}_R - b\mathbf{v}_I + i(a\mathbf{v}_I + b\mathbf{v}_R)\,.$$

Tenendo conto di queste due proprietà si vede facilmente:

Teorema 82 *Se l'insieme $\{\mathbf{v}_1\,, \cdots \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ esso è anche una base di $\mathbb{C}^n$.*

Quando una base di $\mathbb{C}^n$ è specificata assegnando n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ si dice che $\mathbb{C}^n$ È LO SPAZIO COMPLESSIFICATO DI $\mathbb{R}^n$.

Indichiamo con $A_{\mathbb{C}}$ la COMPLESSIFICAZIONE DELLA TRASFORMAZIONE A, definita in questo modo:

$$A_{\mathbb{C}}\mathbf{v} = A_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = (A\mathbf{v}_R) + i(A\mathbf{v}_I)\,. \tag{2.12}$$

Si noti che sia $A\mathbf{v}_R$ che $A\mathbf{v}_I$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

La trasformazione $A_{\mathbb{C}}$ si chiama la (TRASFORMAZIONE) COMPLESSIFICATA DI A.

Indicheremo con I e con 0 le complessificate della matrice identità e della matrice nulla perché queste coincidono con le corrispondenti matrici di $\mathbb{C}^n$.

Ovviamente, in pratica si scrive A invece di $A_{\mathbb{C}}$ indicando col medesimo simbolo sia la trasformazione che la sua complessificata. In questo paragrafo (e ai paragrafi 2.8.2 e 2.10.1) useremo la notazione più complessa ma più chiara $A_{\mathbb{C}}$. Proviamo ora:

Teorema 83 *Sia ha:*

1. $\ker A = 0$ *se e solo se* $\ker A_{\mathbb{C}} = 0$.

2. *se* $n = m$ *allora* $(A^{-1})_{\mathbb{C}} = (A_{\mathbb{C}})^{-1}$.

Dim. Proviamo la proprietà 1. Se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I \in \ker A_{\mathbb{C}}$ allora $A\mathbf{v}_r = 0$ ed anche $A\mathbf{v}_I = 0$. Dunque, se $\ker A_{\mathbb{C}} \neq 0$ allora anche $\ker A \neq 0$.

Viceversa $A\mathbf{v} = 0$ allora si ha anche

$$A_{\mathbb{C}}(\mathbf{v} + i\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + iA\mathbf{v} = 0$$

e quindi se $\ker A \neq 0$ si ha anche $\ker A_{\mathbb{C}} \neq 0$.

Proviamo la proprietà 2. La proprietà 1 mostra che A è invertibile se e solo se $A_{\mathbb{C}}$ è invertibile.

Sia $A\mathbf{v}_R = \mathbf{w}_R$, $A\mathbf{v}_I = \mathbf{w}_I$. Allora,

$$A_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = \mathbf{v}_1 R + iA\mathbf{v}_I = \mathbf{w}_1 R + i\mathbf{w}_I$$

e quindi

$$A_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I) = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I = A^{-1}\mathbf{v}_R + iA^{-1}\mathbf{v}_I = \left(A^{-1}\right)_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_2 I)\ . \qquad \blacksquare$$

Sia ora $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ la assegnata base di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\hat{\mathbf{x}}_1, \cdots, \hat{\mathbf{x}}_m\}$ la assegnata base di $\mathbb{R}^m$.

Assegnate le basi, la trasformazione A viene ad essere rappresentata da una matrice M_A ad elementi reali. Se $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k)\mathbf{v}_i$ ove a_k e b_k sono numeri reali, definiamo

$$(M_A)_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} = M_A \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + iM_A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Si prova facilmente:

Teorema 84 *La matrice che rappresenta* $A_{\mathbb{C}}$ *nelle assegnate basi è la matrice* $(M_A)_{\mathbb{C}}$.

Ovviamente, in pratica anche $(M_A)_{\mathbb{C}}$ si indicherà col simbolo M_A e di fatto col simbolo A.

E' nel senso della complessificazione che vanno intese l'equazione degli autovalori e il polinomio caratteristico:

$$(zI - A)\mathbf{v} = ((a + ib)I - A_{\mathbb{C}})(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = 0\,, \qquad p(z) = \det(zI - (M_A)_{\mathbb{C}})\ .$$

Si noti che se A è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e se $\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$ è un autovettore di $\lambda = a + ib$ allora:

$$A_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = (a + ib)(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) \iff \begin{cases} A\mathbf{v}_R = a\mathbf{v}_R - b\mathbf{v}_I \\ A\mathbf{v}_I = a\mathbf{v}_I + b\mathbf{v}_R\,. \end{cases} \tag{2.13}$$

E' immediato vedere:

Teorema 85 *Sia A un'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e sia $A_{\mathbb{C}}$ il suo complessificato. Si ha:*

1. *se $\mathbf{v}$ è un autovettore che appartiene all'autovalore z e inoltre $\mathbf{v}$ è reale, allora anche l'autovalore z è reale.*

2. *se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$ è un autovalore dell'autovettore reale $z = a + i0$ allora sia $\mathbf{v}_R$ che $\mathbf{v}_I$ sono autovettori di A relativi all'autovalore a. In particolare:*

   (a) *Ogni autovalore reale z di $A_{\mathbb{C}}$ ammette un autovettore reale $\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v} = z\mathbf{v}$.*

3. *se $\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$ è un autovettore di ib e se $b \neq 0$ allora si ha*

$$A^2\mathbf{v}_R = -b^2\mathbf{v}_R\,, \qquad A^2\mathbf{v}_I = -b^2\mathbf{v}_I$$

   e quindi sia $\mathbf{v}_R$ che $\mathbf{v}_I$ sono autovalori di A^2 che appartengono al medesimo autovalore reale $-b^2$.

4. *sia $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$ è un autovettore di $z = a + ib$:*

$$A_{\mathbb{C}}\left(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I\right) = (a + ib)\left(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I\right)$$

   allora

$$A_{\mathbb{C}}\left(\mathbf{v}_R - i\mathbf{v}_I\right) = (a - ib)\left(\mathbf{v}_R - i\mathbf{v}_I\right)$$

   Ossia, $\overline{\mathbf{v}}$ è autovettore di A relativo all'autovalore $\bar{z}$.

Enunciamo ora:

Teorema 86 (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA**)** *Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ ammette almeno uno zero che in generale è un numero complesso. Inoltre, quando i coefficienti del polinomio sono numeri reali:*

1. *se $p(z) = 0$ allora si ha anche $p(\bar{z}) = 0$ ossia gli zeri sono coniugati a coppie;*

2. *se il grado è dispari almeno uno zero è reale.*

E quindi:

Corollario 87 *Ogni endomorfismo di Φ^n ammette almeno un autovalore, in generale complesso. Se $\Phi = \mathbb{R}$ gli autovalori sono coniugati a coppie e se inoltre n è dispari uno almeno è reale.*

Proviamo ora:

Teorema 88 *Siano z_1, z_2,..., z_r autovalori* distinti *di una matrice A e sia $\mathbf{x}_i$ un autovettore di z_i, ossia valga $(z_i I - A)\mathbf{x}_i = 0$. I vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Ricordiamo che, per definizione, ogni autovettore è non nullo.

Proviamo il teorema nel caso di due e di tre autovalori. La dimostrazione nel caso generale è analoga. Se gli autovalori sono z_1 e z_2 e se $A\mathbf{x}_1 = z_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = z_2\mathbf{x}_2$ dobbiamo provare che i due vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ *non* sono colineari. Infatti, se fosse $\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}_2$ (con $\alpha \in \mathbb{C}$) allora avremmo

$$z_1\alpha\mathbf{x}_2 = z_1\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_1 = \alpha A\mathbf{x}_2 = \alpha z_2\mathbf{x}_2$$

e quindi avremmo $z_1 = z_2$ mentre l'ipotesi è che autovettori diversi corrispondano ad autovalori diversi. Dunque:

$$\text{se} \quad z_1 \neq z_2 \quad \text{e} \quad \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Consideriamo il caso di tre autovalori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ che corrispondono a tre autovalori diversi. Proviamo che se gli autovalori sono distinti allora l'uguaglianza

$$\mathbf{x}_3 = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 \tag{2.15}$$

(con α_1 e α_2 numeri complessi) non può aversi.

Si noti che i due numeri α_1 e α_2 non sono ambedue nulli perché $\mathbf{x}_3 \neq 0$. Se valesse (2.15) allora avremmo

$$z_3\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_3 = A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 z_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2 z_2\mathbf{x}_2$$

e dunque avremmo

$$z_3\left[\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2\right] = \alpha_1 z_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2 z_2\mathbf{x}_2$$

ossia

$$(z_3 - z_1)\alpha_1\mathbf{x}_1 + (z_3 - z_2)\alpha_2\mathbf{x}_2 = 0\,.$$

La (2.14) mostra che

$$\alpha_1(z_3 - z_1) = 0\,, \qquad \alpha_2(z_3 - z_2) = 0\,.$$

Come si è detto, α_1 e α_2 non sono contemporaneamente nulli. Dunque, se per esempio $\alpha_1 \neq 0$, si avrà $z_1 = z_3$; se invece $\alpha_2 \neq 0$ allora si avrà $z_2 = z_3$. Ciò contrasta con l'ipotesi che i tre autovalori siano distinti e quindi la (2.15) non vale. ∎

Supponiamo ora che un endomorfismo A ammetta $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ autovalori appartenenti ad autovettori $z_1, \ldots, z_n$ *tra loro distinti, così che gli autovettori sono linearmente indipendenti, e dunque una base di* $\mathbb{C}^n$. Rappresentando un vettore generico $\mathbf{x}$ rispetto alla base degli $\mathbf{x}_i$ si trova

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

e quindi

$$A\mathbf{x} = z_1\alpha_1\mathbf{x}_1 + z_2\alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + z_n\alpha_n\mathbf{x}_n \ :$$

si passa dalle coordinate α_i di $\mathbf{x}$ alle coordinate γ_i di $A\mathbf{x}$ mediante M_A:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad M_A = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix}.$$

Rispetto alla base degli n autovettori, l'endomorfismo A viene rappresentato da una matrice M_A che è diagonale. Ossia, A viene rappresentato da una matrice che ha la forma piò semplice possibile.

Un endomorfismo di Φ^n con n autovettori linearmente indipendenti (in particolare, con n autovalori diversi) si dice DIAGONALIZZABILE. Se accade che gli autovalori sono reali, la forma diagonale della matrice contiene solo numeri reali, e l'endomorfismo si dice *diagonalizzabile* nel campo dei numeri reali. In questo caso è anche possibile scegliere gli autovettori tutti reali.

Un endomorfismo di Φ^n con n autovettori linearmente indipendenti si dice SEMPLICE e le sue rappresentazioni matriciali si dicono MATRICI SEMPLICI.

Infine, mostriamo un esempio di automorfismo che non è semplice.

Esempio 89 Sia $n = 2$ dotato della base canonica e si consider l'endomorfismo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è z^2 e l'endomorfismo ha l'unico autovalore 0. Per trovare gli autovettori bisogna risolvere

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{così che } y = 0 \text{ ed } x \text{ è qualsiasi :}$$

gli autovettori sono tutti multipli di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e *non esistono due autovettori linearmente indipendenti.*

Si noti che anche

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha il polinomio caratteristico $p(z) = z^2$ come nell'esempio precedente, ma ammette due autovettori indipendenti (e infatti in questo caso la matrice è già data in forma diagonale!)

Questi due esempi mostrano anche che endomorfismi sostanzialmente diversi possono avere il medesimo polinomio caratteristico: il polinomio caratteristico non dà informazioni complete sull'endomorfismo. ∎

2.7 I funzionali

Ricordiamo che il termine FUNZIONALE indica una qualsiasi trasformazione, anche non lineare, da uno spazio vettoriale nel suo campo scalare Φ. Precisiamo meglio: se $\Phi^n = \mathbb{R}^n$ allora il funzionale prende valori reali; se $\Phi^n = \mathbb{C}^n$ allora esso prende valori complessi. In questo caso non si esclude che prenda valori numeri complessi reali, ossia con la parte immaginaria nulla.

Il funzionale che ad ogni elemento di Φ^n associa $0 \in \Phi$ si chiama il FUNZIONALE NULLO e si indica col simbolo 0.

Ripetiamo che un funzionale non è necessariamente lineare. Se lo è allora esso ha una proprietà particolarmente importante che sostanzialmente è una riformulazione del Corollario 65:

Teorema 90 *Sia L un funzionale lineare su Φ^n. Esiste $\mathbf{w}_L \in \Phi^n$ con questa proprietà: ogni $\mathbf{v} \in \Phi^n$ si rappresenta come*

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_\mathbf{v} + \alpha_\mathbf{v}\mathbf{w}_L\,, \quad \textit{con } \alpha_\mathbf{v} \in \Phi \textit{ e } \mathbf{n}_\mathbf{v} \in \ker L\,. \tag{2.16}$$

Dunque,

$$L\mathbf{v} = \alpha_\mathbf{v} L\mathbf{w}_L\,. \tag{2.17}$$

Dim. Se $L = 0$ allora $\mathbf{v} \in \ker L$ per ogni $\mathbf{v} \in \Phi^n$ e (2.16) vale con $\mathbf{w}_L = 0$. Sia quindi $L \neq 0$. Essendo $L \neq 0$ si sa, dal Corollario 65, che

$$\Phi^n = \ker L \oplus \{\alpha\mathbf{w}_L\,, \quad \alpha \in \Phi\}\,.$$

Il vettore $\mathbf{w}_L$ è un qualsiasi vettore che non appartene a $\ker L$. Dunque ogni $\mathbf{v} \in \Phi^n$ si rappresenta come in (2.16) con

$$\mathbf{n}_\mathbf{v} = \mathbf{v} - \frac{L\mathbf{v}}{L\mathbf{w}_L}\mathbf{w}_L\,, \qquad \alpha_\mathbf{v} = \frac{L\mathbf{v}}{L\mathbf{w}_L}\,.$$

Quindi vale (2.17). ∎

Si noti che la rappresentazione (2.16) di $\mathbf{v}$ è unica una volta fissato $\mathbf{w}_L$ che però può essere fissato in infiniti modi. Vedremo più avanti un modo per trovare, tra queste infinite scelte per $\mathbf{w}_L$, una privilegiata.

Introduciamo ora i termini FUNZIONALE SESQUILINEARE SU Φ^n e FUNZIONALE BILINEARE SU Φ^n. Questi funzionali non operano su Φ^n, come potrebbe suggerire la terminologia, ma su $\Phi^n \times \Phi^n$. Dunque associano un numero ad una *coppia ordinata* $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \Phi^n \times \Phi^n$. Un funzionale $\mathcal{F}$ si chiama "sesquilineare" quando:

$\mathcal{F}(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ elementi di Φ^n
$\mathcal{F}(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \alpha\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$ in Φ^n e per ogni $\alpha \in \Phi$
$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{w}, \mathbf{x})}$ per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ in Φ^n.

Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(0,\mathbf{v}) = 0 = \mathcal{F}(\mathbf{v},0)\ \forall \mathbf{v} \in \Phi^n\,,\\
&\mathcal{F}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{w}_1+\beta\mathbf{w}_2) = \overline{\mathcal{F}(\alpha\mathbf{w}_1+\beta\mathbf{w}_2,\mathbf{x})} = \overline{\alpha\mathcal{F}(\mathbf{w}_1,\mathbf{x})+\beta\mathcal{F}(\mathbf{w}_2,\mathbf{x})}\\
&= \bar{\alpha}\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{w}_1)+\bar{\beta}\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{w}_2)\,,\\
&\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \text{ ossia } \mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Grazie a queste proprietà si dice che un funzionale sesquilineare è LINEARE nella prima variabile ed antilineare nella seconda. Infatti, una trasformazione $K\colon\ \Phi^n \mapsto \Phi^n$ si dice ANTILINEARE qualdo

$$K(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = K\mathbf{v}+K\mathbf{w}\,, \qquad K(\alpha\mathbf{v}) = \bar{\alpha}K\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v}\ \ \mathbf{w} \in \Phi^n\,, \qquad \forall \alpha \in \Phi\,.$$

Ovviamente, se $\Phi = \mathbb{R}$ allora una trasformazione antilineare è in realtà lineare e ogni funzionale sesquilineare è bilineare secondo la seguente definizione: un funzionale $\mathcal{F}$ è BILINEARE su Φ^n quando è definito su $\Phi^n \times \Phi^n$ ed inoltre:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad \text{è lineare per ogni fissato } \mathbf{w} \in \Phi^n\\
&\mathbf{w} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad \text{è lineare per ogni fissato } \mathbf{v} \in \Phi^n\,.
\end{aligned}$$

Quindi per esempio $\mathcal{F}(v,w) = \bar{w}v$ è sesquilineare su $\mathbb{C}$ mentre $(v,w) = wv$ è bilineare su $\mathbb{C}$. Si noti che nessuno dei due è lineare su $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Un funzionale lineare su $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ è per sempio $(v,w) \mapsto v+w$.

2.8 Prodotto scalare e norma

Un funzionale sesquilineare su Φ^n che ha l'ulteriore proprietà:

$$\mathbf{v} \neq 0 \implies \mathcal{F}(\mathbf{v},\mathbf{v}) > 0$$

si chiama un PRODOTTO INTERNO o PRODOTTO SCALARE.

Un prodotto interno si indica col simbolo $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$. Si noti che il prodotto scalare introdotto al paragrafo 1.5 è un particolare prodotto interno.

Uno spazio lineare dotato di prodotto interno si dice anche SPAZIO EUCLIDEO.

Definiamo ora la NORMA del vettore $\mathbf{x}$:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\,,$$

ancora da interpretarsi come "lunghezza" del vettore. Le proprietà della norma che ne giustificano l'interpretazione come "lunghezza" del vettore sono:

Teorema 91 *La funzione* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$ *ha le proprietà seguenti*

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$ *e* $||\mathbf{x}|| = 0$ *se e solo se* $\mathbf{x} = 0$*;*

2. $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\cdot||\mathbf{x}||$ *(si noti che* $|\alpha|$ *indica il valore assoluto oppure il modulo se* α *è complesso).*

3. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$ (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ).

4. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE).

Dim. Le prime due proprietà sono ovvie. Proviamo la disuguaglianza di Schwarz. Se uno dei due vettori $\mathbf{x}$ oppure $\mathbf{y}$ è nullo la disuguaglianza è ovvia. Supponiamoli quindi ambedue diversi da zero.

Dalla proprietà 1., per ogni t vale

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = ||\mathbf{x}||^2 + t\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \bar{t}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |t|^2 ||\mathbf{y}||^2 .$$

Scegliamo

$$t = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{y}||^2} .$$

Sostituendo si trova

$$0 \leq ||\mathbf{x}||^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{||\mathbf{y}||^2} .$$

Questa è la disuguaglianza cercata.

Mostriamo che la disuguaglianza triangolare discende dalla disuguaglianza di Schwarz notando che

$$\begin{aligned} &||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2\Re e \, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\leq ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2\,|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 . \end{aligned}$$

Questa è la disuguaglianza triangolare. ∎

La disuguaglianza di Schwarz mostra che

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \qquad \forall \mathbf{y} \text{ con } \|\mathbf{y}\| = 1 .$$

D'altra parte, se $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ si trova l'uguaglianza e quindi

Corollario 92 *Per ogni* $\mathbf{x}$ *si ha*

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_{\|\mathbf{y}\|=1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sup_{\|\mathbf{y}\|=1} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle .$$

Una ulteriore proprietà della norma è la seguente:

Teorema 93 (IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA**)** *Per ogni* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vale:*

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2\left(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2\right)$$

La verifica è immediata, sviluppando

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle , \qquad ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle .$$

Il termine "identità del parallelogramma" viene dall'interpretazione che quest'identità ammette in $\mathbb{R}^2$.

Un vettore di norma 1 si chiama VERSORE o VETTORE NORMALIZZATO. Quando ad un vettore $\mathbf{v} \neq 0$ si sostituisce il versore $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ si dice che SI NORMALIZZA il vettore $\mathbf{v}$.

Si dice che due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ORTOGONALI quando

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \,.$$

In questo caso si scrive

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \,.$$

Si confronti col paragrafo 1.5 e si noti che il TEOREMA DI PITAGORA vale in generale:

Teorema 94 (di Pitagora) *Se* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *allora*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \,.$$

Infatti,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \,.$$

Due sottospazi X ed Y si dicono tra loro ortogonali se

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{x} \in X \quad \mathbf{y} \in Y \,.$$

In tal caso si scrive $X \perp Y$.

Si noti che $0 \perp Y$ per ogni Y.

In $\mathbb{R}^n$, introdotti prodotto scalare e norma, è ancora possibile definire l'angolo tra due vettori mediante la formula

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \,, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \,.$$

Si ha $\cos\theta = \pi/2$ se i due vettori sono ortogonali. Si confronti col paragafo 1.5. Si noti che in questo caso dobbiamo lavorare in $\mathbb{R}^n$ e non in $\mathbb{C}^n$ per avere $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ numero reale però il concetto di ortogonalità verrà usato sia tra vettori di $\mathbb{R}^n$ che di $\mathbb{C}^n$.

Infine, sia V un qualsiasi sottoinsieme di Φ^n. Definiamo

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in \Phi^n \;\; \mathbf{x} \perp \mathbf{v} \text{ per ogni } \mathbf{v} \in V \,.$$

E' immediato verificare che $V^\perp$ è un sottospazio di Φ^n anche se V non è un sottospazio. Inoltre:

Lemma 95 *Se* $\mathbf{w} \in V \cap V^{\perp}$ *allora* $\mathbf{w} = 0$. *Se* $0 \notin V$ *allora* $V \cap V^{\perp} = \emptyset$; *se* $0 \in V$, *in particolare se* V *è un sottospazio, allora* $V \cap V^{\perp} = 0$.

Dim. Basta provare che se $\mathbf{w} \in V \cap V^{\perp}$ allora $\mathbf{w} = 0$. Ciò accade perché se $\mathbf{w} \in V \cap V^{\perp}$ allora $\mathbf{w}$ è perpendicolare a se stesso e quindi

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 = 0 \implies \mathbf{w} = 0\,.$$

Una formula matriciale per il calcolo del prodotto scalare

Fissiamo una base $\{\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2\,,\ \cdot\,,\ \mathbf{x}_n\}$ di Φ^n e siano

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\,, \qquad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{x}_k\,.$$

Il prodotto scalare di questi vettori è

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \;=\; \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{x}_k \rangle \;=\; \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_k g_{i\,k} \quad \text{ove} \quad g_{i\,k} \;=\; \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle\,. \tag{2.18}$$

Dunque il prodotto scalare si calcola anche eseguendo i seguenti prodotti righe per colonne:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \bar{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1\,1} & g_{2\,1} & \cdots & g_{n\,1} \\ g_{1\,2} & g_{2\,2} & \cdots & g_{n\,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1\,n} & g_{2\,n} & \cdots & g_{n\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Un caso particolarmente comodo si incontra quando gli elementi della base sono versori due a due ortogonali:

$$g_{i\,k} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle = \delta_{i\,k} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = k \\ 0 & \text{se} \quad i \neq k\,. \end{cases} \tag{2.20}$$

In questo caso la matrice $n \times n$ in (2.19) è diagonale e con tutti gli elementi diagonali uguali ad 1 e

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}_1 \alpha_i\,. \tag{2.21}$$

Una base di Φ^n e cui elementi sono *versori due a due ortogonali* si chiama BASE ORTONORMALE Ogni spazio vettoriale Φ^n ammette basi ortonormali. Infatti, *la base canonica è ortonormale. Essa non è unica e talvolta conviene usare basi ortonormali diverse da essa.*

Il simbolo $\delta_{i\,k}$ in (2.20) si incontra assai frequentemente e si chiama SIMBOLO DI KRONECKER.

2.8.1 Basi ortognormali di sottospazi e il teorema delle proiezioni

La formula molto semplice (2.21) per il prodotto scalare mostra l'importanza di lavorare con basi di versori due a due ortogonali e, come si è già detto, una base i cui elementi sono versori due a due ortogonali si chiama una BASE ORTONORMALE. Lo scopo di questo paragrafo è di mostrare che in uno spazio lineare dotato di prodotto interno, ogni sottospazio ammette basi ortonormali, di mostrare come costruirle e di provare alcune conseguenze di ciò.

Notiamo prima di tutto:

Lemma 96 *Siano $\mathbf{x}_i$ $i = 1, \dots, m$ vettori tutti non nulli e due a due ortogonali in un sottospazio vettoriale $X \subseteq \Phi^n$. Essi sono linearmente indipendenti; e quindi m non supera la dimensione di X.*

Dim. Sia

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m = 0\,.$$

Si moltiplichi scalarmente per $\mathbf{x}_1$ e si noti che $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$ se $j \neq 1$. Dunque rimane

$$\alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle = \alpha_1 \|\mathbf{x}_1\|^2 \text{e } \|\mathbf{x}_1\|^2 \neq 0 \text{ perché } \mathbf{x}_1 \neq 0\,.$$

Dunque, $\alpha_1 = 0$. In modo analogo si vede che $\alpha_i = 0$ per ogni i. ∎

Proviamo ora:

Teorema 97 *Sia $X \subseteq \Phi^n$ un sottospazio di dimensione $m \geq 1$. Esiste una base ortonormale di Φ^n i cui primi m elementi sono una base ortonormale di X.*

Dim. La dimostrazione del teorema è costruttiva nel senso che mostra come costruire una base con le proprietà richieste dal teorema.

La costruzione si fa in modo iterativo:

Passo 1 Il primo elemento della base.

Passo 1a si fissa un qualsiasi elemento $\mathbf{x}_1$ non nullo di X e si normalizza. Si chiama $\mathbf{e}_1$ il versore così ottenuto:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} \qquad (\text{dunque } \mathbf{e}_1 \in X)\ .$$

Passo 1b Se $\dim X = 1$ allora ogni altro elemento di X è multiplo di $\mathbf{e}_1$ ed in tal caso $\{\mathbf{e}_1\}$ è una base di X.

Si noti che se $\dim X = 1$ e se $\Phi = \mathbb{R}$ allora esiste una seconda base ortonormale di X, la base $\{-\mathbf{e}_1\}$ e nessun'altra. Se invece $\Phi = \mathbb{C}$ allora ogni $\{\alpha \mathbf{e}_1\}$ con $|\alpha| = 1$ è una base ortonormale di X.

Passo 2 Il secondo elemento della base.

Passo 2a se $\dim X \geq 2$ esiste almeno un elemento di X non colineare con $\mathbf{e}_1$. Si sceglie uno di tali elementi, diciamo $\mathbf{x}_2$, e si costruisce

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \,.$$

Si nota che $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{e}_1$ e si normalizza $\mathbf{w}_2$ ottenendo

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} \qquad \text{(dunque } \mathbf{e}_2 \in X\text{)} \ .$$

I due vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono tra loro ortogonali.

Passo 2b Lo spazio lineare $X_2 = \text{span}\,\{\mathbf{e}_1\,, \mathbf{e}_2\}$ è un sottospazio di X di dimensione 2, riferito ad una base ortonormale. Se $\dim X = 2$ allora $X = X_2$ ed il processo della costruzione della base ortonormale di X è completato.

Passo 3 <u>Il terzo elemento della base</u>.

Passo 3a Se $\dim X > 2$ allora esiste $\mathbf{x}_3 \in X$ con $x_3 \notin X_2$. Si costruisce

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \,.$$

Si nota che $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{e}_2$. Si normalizza $\mathbf{w}_3$ ottenendo

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} \qquad \text{(dunque } \mathbf{e}_3 \in X\text{)} \ .$$

I tre vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono tra loro ortogonali.

Passo 3b Lo spazio lineare $X_3 = \text{span}\,\{\mathbf{e}_1\,, \mathbf{e}_2\,, \mathbf{e}_3\}$ è un sottospazio di X di dimensione 3, riferito ad una base ortonormale. Se $\dim X = 3$ allora $X = X_2$ ed il processo della costruzione della base ortonormale di X è completato.

<u>Gli elementi successivi della base di X</u>: Se $\dim X > 3$ si sceglie un $\mathbf{x}_4 \notin X_3$ e si ripete il metodo precedente; si itera per ogni $r \leq \dim X$: al passo r si sceglie $\mathbf{x}_r \notin X_{r-1}$, si definisce

$$\mathbf{w}_r = \mathbf{x}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{w}_r}{\|\mathbf{w}_r\|\|} \in X \,.$$

Si procede fino a $k = \dim X$ e si trova una base ortogonale $\{\mathbf{e}_1\,, \mathbf{e}_2\,, \ldots\, \mathbf{e}_k\}$ di X.

<u>Si completa la base fino ad una base ortonormale di Φ^n</u>: Se $X = \Phi^n$ niente altro va fatto. Se invece $k = \dim X < n$ si completa la base trovata per X fino ad ottenere una base ortonormale per Φ^n: si sceglie un $\mathbf{w}_{k+1} \notin X$ e si definisce

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{w}_{k+1}}{\|\mathbf{w}_{k+1}\|} \,.$$

Si itera $n - k$ volte, fino ad ottenere una base ortonormale di Φ^n.

Ciò completa la dimostrazione. ∎

Si noti che la base ortonormale di Φ^n costruita nel Teorema 97 generalmente non è la base canonica.

Osservazione 98 (Sulla notazione) Da ora in poi, indicando con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ una base, intenderemo sempre che questa sia una base ortonormale. la lettera "$\mathbf{e}$" non verrà usata per indicare vettori che non appartengono a basi ortonormali. ∎

La costruzione vista nel Teorema 97, fatta a partire da un qualsiasi $\mathbf{x}_1 \in \Phi^n$, dà anche il risultato seguente:

Corollario 99 *Fissato un qualsiasi $\mathbf{x} \in \Phi^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, lo spazio Φ^n ammette basi ortonormali ordinate di cui $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è il primo elemento.*

Inoltre, una costruzione analoga a quella della dimostrazione del Teorema 97 permette di provare il seguente risultato importantissimo:

Teorema 100 (DELLE PROIEZIONI**)** *Sia X un sottospazio di Φ^n e sia $\mathbf{w} \in \Phi^n$. Esiste un unico $\mathbf{x}_\mathbf{w} \in X$ tale che*

$$\mathbf{w} - \mathbf{x}_\mathbf{w} \perp X\,.$$

Il vettore $\mathbf{x}_\mathbf{w}$ si chiama la PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\mathbf{w}$ SU X.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su X è il punto di X più vicino a $\mathbf{w}$.

Dim. Se $X = \Phi^n$ allora $\mathbf{x}_\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Se $\dim X = k < n$ si costruisca una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, , \mathbf{e}_k\}$ di X. Il vettore

$$\mathbf{x}_\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2\rangle \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_k\rangle \mathbf{e}_k \tag{2.22}$$

ha la proprietà che

$$\mathbf{w} - \mathbf{x}_\mathbf{w} \perp \mathbf{e}_i \quad 1 \leq i \leq k \qquad \text{e quindi } \mathbf{w} - \mathbf{x}_\mathbf{w} \perp X\ .$$

Ciò prova l'esistenza della proiezione ortogonale.

L'unicità della proiezione ortogonale si vede perchè se $\tilde{\mathbf{x}}$ è una seconda proiezione ortogonale allora

$$\mathbf{x}_\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_\mathbf{w} - \mathbf{w}) - (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) \in X^\perp \quad \text{e anche } \mathbf{x}_\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{x}} \in X$$

e quindi $\mathbf{x}_\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{x}} = 0$ (si veda il Lemma 95).

Sia ora $\mathbf{z} \in X$. Dal Teorema di Pitagora,

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{z} - \mathbf{x}_\mathbf{w}) + (\mathbf{x}_\mathbf{w} - \mathbf{w})\|^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{x}_\mathbf{w} - \mathbf{w}\|^2\,.$$

Il minimo del secondo membro si trova se e solo se $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\mathbf{w}$. ∎

Indichiamo con P_X la trasformazione

$$P_X\ :\ \Phi^n \mapsto X \quad P_X\mathbf{w} = \mathbf{x}_\mathbf{w} \in X\,.$$

L'unicità della proiezione ortogonale mostra che P_X è una funzione (univoca) e inoltre:

Teorema 101 *Si ha:*

1. *la trasformazione P_X è data da (2.22); in particolare P_X è una trasformazione lineare.*

2. *La trasformazione P_X verifica $P_X^2\mathbf{w} = P_X(P_X\mathbf{w}) = P_X w$ e ciò giustifica il termine "proiezione".*

3. *si ha* $\mathrm{im}(I - P_X) \perp X$ *ed ogni* $\mathbf{w} \in \Phi^n$ *si rappresenta in modo unico come*

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{x} \in X\,, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{im}(I - P_X) = X^\perp\,. \tag{2.23}$$

4. *si ha* $\|P_X\mathbf{w}\| \le \|\mathbf{w}\|$ *e anche* $\|(I - P_X)\mathbf{w}\| \le \|\mathbf{w}\|$.

Dim. La proprietà 1 è niente altro che la costruzione dell'unico elemento $\mathbf{x_w}$, che è dato dalla (2.22).

L'espressione (2.22) mostra la linearità di P e mostra anche che $P^2 = P$, ossia la proprietà 2.

Proviamo la 3. Usiamo la procedura descritta nel Teorema 97 per completare la base ortogonale di X fino ad avere una base ortogonale di Φ^n. Ciò si ottiene aggiungendo alla base di X versori $\mathbf{e}_r$, $k+1 \le r \le n$, ortogonali ad X e quindi tali che

$$P_X\mathbf{e}_r = 0\,.$$

Dunque,

$$X^\perp = \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r\,.$$

Ogni $\mathbf{w} \in \Phi^n$ si rappresenta come

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r\,, \qquad \alpha_r \in \Phi$$

e quindi

$$(I - P_X)\mathbf{w} = (I - P_X)\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r = \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r\,, \qquad \alpha_r \in \Phi\,.$$

Dunque $\mathrm{im}(I - P_X) = X^\perp$. In particolare

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r = \sum_{r=1}^{k} \alpha_r \mathbf{e}_r + \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \mathbf{e}_r = P_X\mathbf{w} + (I - P_X)\mathbf{w}$$

è somma di un elemento di X, che è $P_X w$, e di uno di $X^\perp$ che è $(I - P_X)\mathbf{w}$.

La rappresentazione è unica. Infatti, se

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}} \quad \text{con } \mathbf{x},\ \tilde{\mathbf{x}} \text{ in } X \text{ e } \mathbf{y},\ \tilde{\mathbf{y}} \text{ in } X^{\perp}$$

allora si ha

$$\underbrace{\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}}_{\in X} = \underbrace{\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}_{\in X^{\perp}} \qquad \text{e quindi } \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \text{ e } \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}\,.$$

La proprietà 4 segue dal teorema di Pitagora:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{w} - P_X\mathbf{w}) + P_X\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{w} - P_X\mathbf{w}\|^2 + \|P_X\mathbf{w}\|^2\,. \quad \blacksquare$$

L'uguaglianza (2.23) si esprime dicendo che Φ^n è SOMMA DIRETTA di X e di $X^{\perp}$ e si scrive

$$\Phi^n = X \oplus X^{\perp}\,.$$

Si ricordi ora il Corollario 65 e la definizione di iperpiano. Si ha:

Corollario 102 *Se $X \subseteq \Phi^n$ è uniperpiano e se $X \neq \Phi^n$, esiste $\mathbf{e} \perp X$ con $\|\mathbf{e}\| = 1$.*

Una conseguenza importante del Teorema delle proiezioni è che i funzionali lineari hanno una rappresentazione particolare:

Teorema 103 *Sia L un* funzionale *lineare su Φ^n. Esiste un unico $\mathbf{x}_L \in \Phi^n$ tale che*

$$L\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_L \rangle\,.$$

Inoltre, la trasformazione $L \mapsto \mathbf{x}_L$ è antilineare.

Dim. Se $L = 0$ allora $x_L = 0$ (e $\ker L = \Phi^n$ ha dimensione n).

Se $L \neq 0$ allora $\ker L$ ha dimensione $n-1$ e quindi $[\ker L]^{\perp} = \{\alpha \mathbf{e}_0\}$ con $\|\mathbf{e}_0\| = 1$.

Notiamo che

$$\alpha_0 = L\mathbf{e}_0 \neq 0\,.$$

Decomponiamo

$$\Phi^n = (\ker L) \oplus (\ker L)^{\perp} = (\ker L) \oplus \{\alpha \mathbf{e}_0\,,\ \alpha \in \Phi\}\,.$$

Sia $\mathbf{w} \in \Phi^n$, $\mathbf{w} = \mathbf{n}_{\mathbf{w}} + \alpha_{\mathbf{w}}\mathbf{e}_0$ con $\mathbf{n}_{\mathbf{w}} \in KerL$. Sia ha

$$\begin{aligned} L\mathbf{w} &= L\mathbf{n}_{\mathbf{w}} + \alpha_{\mathbf{w}} L\mathbf{e}_0 = \alpha_{\mathbf{w}}\alpha_0 \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_0 \rangle &= \langle \mathbf{n}_{\mathbf{w}} + \alpha_{\mathbf{w}}\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = \alpha_{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

e quindi

$$L\mathbf{w} = \alpha_{\mathbf{w}}\langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_0 \rangle = \langle \mathbf{w}, \bar{\alpha}_0 \mathbf{e}_0 \rangle\,. \tag{2.24}$$

Ciò prova che L si rappresenta mediante un prodotto interno. Non prova l'unicità della rappresentazione perché la rappresentazione è stata costruita a partire da un vettore particolare $\mathbf{e}_0$. Che la rappresentazione è unica si vede notando che se ce ne sono due

$$L\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{allore} \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \Phi^n$$

e quindi $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ come si vede scegliendo $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

L'unicità della rappresentazione mostra che

$$\begin{aligned} (aL + bM)\mathbf{w} &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_{aL+bM} \rangle \,, \\ (aL + bM)\mathbf{w} &= aL\mathbf{w} + bM\mathbf{w} = a\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_L \rangle + b\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_M \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, \bar{a}\mathbf{x}_L \rangle + \langle \mathbf{w}, \bar{b}\mathbf{x}_M \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{x}_{aL+bM} = \bar{a}\mathbf{x}_L + \bar{b}\mathbf{x}_M \,.$$

Dunque, la trasformazione $L \mapsto \mathbf{x}_L$ è antilineare. ∎

2.8.2 Prodotto scalare e trasformazione aggiunta

Consideriamo una trasformazione lineare A da Φ^n in Φ^m. Non si esclude che sia $n = m$. Fissiamo un qualsiasi $\mathbf{k} \in \Phi^m$, spazio d'arrivo della trasformazione, e consideriamo il *funzionale lineare su* Φ^n

$$h \mapsto L_{\mathbf{k}}\mathbf{h} = \langle A\mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle_{\Phi^m} \,.$$

Si osservi la notazione: ora abbiamo due spazi dotati di prodotto interno e quindi usiamo l'indice per precisare in quale dei due spazi il prodotto interno viene calcolato. Lo stesso faremo per le norme.

Il Teorema 103 mostra che il funzionale lineare $L_{\mathbf{k}}$ si rappresenta come prodotto interno in Φ^n, ossia esiste $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{\mathbf{k}} \in \Phi^n$ tale che

$$\langle A\mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle_{\Phi^m} = \langle \mathbf{h}, \mathbf{z}_{\mathbf{k}} \rangle_{\Phi^n} \,.$$

Inoltre, l'elemento $\mathbf{z}_{\mathbf{k}}$ è unico. Quindi si può studiare la trasformazione $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{z}_{\mathbf{k}}$: $\Phi^m \mapsto \Phi^n$. Proviamo:

Teorema 104 *La trasformazione* $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{z}_{\mathbf{k}}$*:* $\Phi^m \mapsto \Phi^n$ *è lineare.*

<u>Dim</u>. La linearità si prova notando che

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{h}, (a\mathbf{k}_1 + b\mathbf{k}_2) \rangle_{\Phi^m} &= \bar{a}\langle A\mathbf{h}, \mathbf{k}_1 \rangle_{\Phi^m} + \bar{b}\langle A\mathbf{h}, \mathbf{k}_2 \rangle_{\Phi^m} \\ &= \bar{a}\langle \mathbf{h}, \mathbf{z}_{\mathbf{k}_1} \rangle_{\Phi^n} + \bar{b}\langle \mathbf{h}, \mathbf{z}_{\mathbf{k}_2} \rangle_{\Phi^n} = \langle \mathbf{h}, (a\mathbf{z}_{\mathbf{k}_1} + b\mathbf{z}_{\mathbf{k}_2}) \rangle_{\Phi^n} \,. \quad ∎ \end{aligned}$$

La trasformazione $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{z}_{\mathbf{k}}$ si chiama la TRASFORMAZIONE AGGIUNTA di A e si indica col simbolo A^*:

$$A^*\mathbf{k} = \mathbf{z}_{\mathbf{k}} \,.$$

Sottolineiamo che A: $\Phi^n \mapsto \Phi^m$ mentre A^*: $\Phi^m \mapsto \Phi^n$ e che A^* è definita dall'uguaglianza

$$\langle A\mathbf{h}, \mathbf{k}\rangle_{\Phi^m} = \langle \mathbf{h}, A^*\mathbf{k}\rangle_{\Phi^n} \,. \tag{2.25}$$

Nelle considerazioni precedenti le dimensioni n ed m possono essere diverse, ma non è vietato che siano uguali. Se sono uguali potrebbe accadere che $A^* = A$. In tal caso si dice che A è una TRASFORMAZIONE AUTOAGGIUNTA. Ma, se $n = m$ la trasformazione si chiama anche un endomorfismo e quindi la chiameremo anche un ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO. Analogamente,

- Un endomorfismo A di $\mathbb{C}^n$ si dice UNITARIO se $A^* = A^{-1}$;
- Un endomorfismo A di $\mathbb{R}^n$ si dice ORTOGONALE se $A^* = A^{-1}$.

Teorema 105 *Valgono le proprietà riassunte dalla tabella seguente:*

$(A+B)^* = A^* + B^*$	$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
$(AB)^* = B^* A^*$	*se A è invertibile anche A^* lo è e si ha* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Dim. La verifica è immediata. Limitiamoci a considerare quella relativa alla trasformazione inversa. Sia $n = m$ e supponiamo che A: $\Phi^n \mapsto \Phi^n$ sia inveribile. Dunque, $h = A^{-1}y$. Scrivendo $h = A^{-1}y$ in (2.25) si trova

$$\langle y, k\rangle_{\Phi^n} = \langle A^{-1}y, A^*k\rangle_{\Phi^n} = \langle y, \left(A^{-1}\right)^* A^*k\rangle_{\Phi^n} \,.$$

Quest'uguaglianza vale per ogni y e per ogni k. Dunque,

$$\left(A^{-1}\right)^* A^*k = k \qquad \text{ossia} \quad \left(A^{-1}\right)^* A^* = I \,. \quad \blacksquare$$

E' importante sapere che:

Teorema 106 *Sia X un sottospazio di Φ^n e sia P_X la proiezione ortogonale di Φ^n su X. La trasformazione lineare P_X è autoaggiunta.*

Dim. Va provato che

$$\langle P_X h, k\rangle = \langle h, P_X k\rangle \qquad \forall h\,,\ k \in \Phi^n \,.$$

Rappresentiamo

$$h = P_X h + (I - P_X)h\,, \qquad k = P_X k + (I - P_X)k$$

così che

$$\begin{aligned}\langle P_X h, k\rangle &= \langle P_X\left(P_X h + (I-P_X)h\right), P_X k + (I-P_X)k\rangle \\ &= \langle P_X h, P_X k + (I-P_X)k\rangle = \langle P_X h, P_X k\rangle\,.\end{aligned}$$

In modo analogo si vede che

$$\langle h, P_X k\rangle = \langle P_X h, P_X k\rangle\,. \quad \blacksquare$$

Complessificato, prodotto interno ed aggiunto

Supponiamo ora di aver definito un prodotto interno su $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{R}^n}\,.$$

Questo prodotto interno si estende a $\mathbb{C}^n$, complessificato di $\mathbb{R}^n$, definendo

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I, \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{C}^n} &= \left[\langle \mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{v}_I, \mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^n}\right] \\ &\quad + i\left[\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \mathbf{v}_I, \mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^n}\right]\end{aligned}$$

(ricordiamo che con le notazioni $\mathbf{v}_R$, $\mathbf{v}_I$, $\mathbf{w}_R$ e $\mathbf{w}_I$ si intendono elementi di $\mathbb{R}^n$).

Supponiamo ora di avere una trasformazione lineare A da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Complessifichiamo i due spazi e consideriamo la corrispondente trasformazione complessificata $A_{\mathbb{C}}$, si veda la definizione nel paragrafo 2.6.1. Vogliamo studiare la relazione tra A^*, $(A^*)_{\mathbb{C}}$ ed $(A_{\mathbb{C}})^*$. Proviamo:

Teorema 107 *Si ha:*

$$(A_{\mathbb{C}})^* = (A^*)_{\mathbb{C}}\,, \qquad (A_{\mathbb{C}})^*(\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I) = A^* w_R + iA^* w_I\,. \tag{2.26}$$

<u>Dim</u>. Infatti si ha:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I, (A_{\mathbb{C}})^*(\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I)\rangle_{\mathbb{C}^n} &= \langle A_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I), \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{C}^m} \\ &= \langle A\mathbf{v}_R + iA\mathbf{v}_I, \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{C}^m} \\ &= \langle A\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^m} - \langle A\mathbf{v}_I, \mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^m} + i\left[\langle A\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle A\mathbf{v}_I, \mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^m}\right] \\ &= \langle \mathbf{v}_R, A^*\mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{v}_I, A^*\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^n} + i\left[\langle \mathbf{v}_R, A^*\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \mathbf{v}_I, A^*\mathbf{w}_R\rangle_{\mathbb{R}^n}\right] \\ &= \langle \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I, A^*\mathbf{w}_R + iA^*\mathbf{w}_I\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= \langle \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I, (A^*)_{\mathbb{C}}(\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I)\rangle_{\mathbb{C}^n}\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Siano ora fissate basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^m$. Si vede facilmente che la relazione analoga vale per le rappresentazioni matriciali degli operatori $(A_{\mathbb{C}})^*$ ed $(A^*)_{\mathbb{C}}$:

Teorema 108 *Fissate basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^m$ sia ha*

$$M_{(A_{\mathbb{C}})^*} = (M_{A_{\mathbb{C}}})^*\,.$$

2.8.3 Rappresentazione matriciale della trasformazione aggiunta

I termini "aggiunto" ed "autoaggiunto" si sono già incontrati studiando le matrici. Ciò fa pensare che ci sia una stretta relazione tra la matrice che rappresenta A (in certe basi assegnate di Φ^n e ϕ^m) e quella che rappresenta A^*. Ciò è sostanzialmente vero ma richiede un po' di cautela. Questo problema esaminiamo ora. Consideriamo prima di tutto un esempio:

Esempio 109 Consideriamo la trasformazione A: $\mathbb{R}^2$ in sé definita in questo modo. Consideriamo lo spazio lineare delle coppie ordinate (x, y), ossia $\mathbb{R}^2$, dotato del prodotto interno

$$\langle (x, y), (a, b) \rangle = ax + by\,.$$

Consideriamo la trasformazione A: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definita in questo modo:

$$A(x, y) = (x, 2y)\,.$$

Si vede immediatamente che A è autoaggiunto perché

$$\begin{aligned}\langle A(x, y), (a, b) \rangle &= \langle (x, 2y), (a, b) \rangle = ax + b(2y) = ax + 2by\,,\\ \langle (x, y), A(a, b) \rangle &= \langle (x, y), (a, 2b) \rangle = ax + (2b)y\,.\end{aligned}$$

Lo spazio $\mathbb{R}^2$ si può rappresentare rispetto alla base canonica,

$$(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\,.$$

Rappresentiamo A rispetto alla base canonica sia quando $\mathbb{R}^2$ si considera come spazio di partenza che quando $\mathbb{R}^2$ si considera come spazio di arrivo. Notiamo che

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\,, \qquad A\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2\,.$$

Consideriamo

$$A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = \alpha_1 A\mathbf{e}_1 + (2\alpha_2)\mathbf{e}_2 = \hat{\alpha}_1\mathbf{e}_1 + \hat{\alpha}_2\mathbf{e}_2$$

così che

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1\,, \qquad \hat{\alpha}_2 = 2\alpha_2 \quad \text{e quindi} \quad M_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Come ci si poteva attendere, la matrice M_A è simmetrica.

E' facile immaginare che se si usano basi diverse in $\mathbb{R}^2$, una base quando è considerato come insieme di partenza e una diversa base quando è considerato come insieme di arrivo, la simmetria vada persa perché è come considerare una trasformazione A tra spazi che hanno la medesima dimensione ma che sono tra loro diversi. Per esempio, consideriamo $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ come base di $\mathbb{R}^2$ inteso come spazio di arrivo. Invece consideriamo ancora la base canonica in partenza. Allora,

$$A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = (\alpha_1, 2\alpha_2) = \hat{\alpha}_1\mathbf{v}_1 + \hat{\alpha}_2\mathbf{v}_2$$

e quindi $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ devono verificare

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \alpha_1 \,, \qquad \hat{\alpha}_2 = 2\alpha_2 \qquad \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} .$$

La matrice M_A questa volta non è simmetrica, *cosa che si poteva facilmente immaginare.*

Usiamo ora la medesima base $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ sia in partenza che in arrivo e calcoliamo la matrice M_A:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2) \\ &= \hat{\alpha}_1\mathbf{v}_1 + \hat{\alpha}_2\mathbf{v}_2 = (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_2) \end{aligned}$$

e quindi

$$\hat{\alpha}_2 = 2\alpha_2 \,, \qquad \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{e quindi} \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \,.$$

Dunque, rispetto a questa base, la matrice M_A è

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice non è simmetrica nonostante che } A \text{ sia autoaggiunto}\,.$$

La ragione di questa apparente stranezza è che la *trasformazione* aggiunta è stata definita mediante il prodotto interno mentre la *matrice* aggiunta è stata definita mediante il prodotto righe per colonne di matrici. Il prodotto righe per colonne corrisponde al prodotto interno solamente se lo spazio è riferito ad una base ortonormale e quindi la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, non essendo ortonormale, non ha una relazione diretta col prodotto righe per colonne di matrici. ∎

Quest'esempio suggerisce il risultato seguente:

Teorema 110 *Sia A: $\Phi^n \mapsto \Phi^m$ e supponiamo che Φ^n sia rappresentato rispetto ad una base ortonormale ordinata $\{\mathbf{e}_1\,,\ \cdot\ \mathbf{e}_n\}$ e Φ^m sia rappresentato rispetto ad una base ortonormale ordinata $\{\hat{\mathbf{e}}_1\,,\ \cdot\ \hat{\mathbf{e}}_m\}$ (non necessariamente le basi canoniche). Siano M_A la matrice che rappresenta A ed M_{A^*} quella che rappresenta A^*. Si ha*

$$M_{A^*} = (M_A)^* \,.$$

<u>Dim</u>. Sia

$$A\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}\hat{\mathbf{e}}_j \,, \qquad A^*\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu,j}\mathbf{e}_\nu$$

così che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i \,, \qquad A\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}\hat{\mathbf{e}}_j\right] = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\alpha_i\right] \hat{\mathbf{e}}_j \,,$$

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{m} \beta_i\hat{\mathbf{e}}_j \,, \qquad A^*\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j A^*\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left[\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu,j}\mathbf{e}_j\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} c_{\nu\,,j}\beta_j\right] \mathbf{e}_j$$

così che

$$M_A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}, \qquad M_{A^*} = \begin{bmatrix} c_{1\,1} & c_{1\,2} & \dots & c_{1\,m} \\ c_{2\,1} & c_{2\,2} & \dots & c_{2\,m} \\ \vdots & & & \\ c_{n\,1} & c_{n\,2} & \dots & c_{n\,m} \end{bmatrix}.$$

Ora usiamo il fatto che le basi sono ortonormali per calcolare

$$a_{r\,i} = \langle A\mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{e}}_r \rangle_{\Phi^m} = \langle \mathbf{e}_i, A^*\hat{\mathbf{e}}_r \rangle_{\Phi^n} = c_{i\,r}:$$

$$\begin{array}{ccccc} \langle A\mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{e}}_r \rangle & = & \langle \sum_{j=1}^m a_{j\,i}\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_r \rangle & = & a_{r\,i} \\ \| & & & & \\ \langle \mathbf{e}_i, A^*\hat{\mathbf{e}}_r \rangle & = & \langle \mathbf{e}_i, \sum_{j\nu=1}^n c_{\nu\,r}\mathbf{e}_\nu \rangle & = & \bar{c}_{i\,r} \end{array}$$

così che $\bar{c}_{i\,r} = a_{r\,i}$ e quindi $M_{A^*} = M_A^*$. ∎

Di conseguenza:

Corollario 111 *La trasformazione lineare A: $\Phi^n \mapsto \Phi^n$ è autoaggiunta quando la matrice M_A, ottenuta dotando Φ^n di una qualsiasi base ortonormale, è una matrice autoaggiunta.*

2.8.4 Rappresentazioni matriciali di endomorfismi unitari ed ortogonali

Rappresentiamo Φ^n rispetto ad una base ordinata ed ortonormale e sia A un endomorfismo di Φ^n. Si è provato, al Teorema 110, che $M_{A^*} = (M_A)^*$. Inoltre si sa che se A è invertibile $M_{A^{-1}} = (M_A)^{-1}$. Dunque:

Teorema 112 *In $\mathbb{C}^n$ (dotato di una base ortonormale), l'endomorfismo A è unitario se e solo se M_A è una matrice unitaria; in $\mathbb{R}^n$ (dotato di una base ortonormale), l'endomorfismo A è ortogonale se e solo se la matrice M_A è ortogonale.*

Notiamo esplicitamente che le colonne di una matrice unitaria (in particolare ortogonale) verificano

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{i\,j} \qquad (\delta_{i\,j} \text{ è il simbolo di Kronecker}).$$

Grazie a queste proprietà, da ora in poi lavorando con la rappresentazione matriciale di una trasformazione rispetto a fissate basi ordinate nello spazio vettoriale di partenza e in quello di arrivo intenderemo, se non esplicitamente detto il contrario, che queste sono *basi ortonormali.*

2.9 Sistemi di equazioni lineari

Applichiamo ora le proprietà delle matrici per studiare i SISTEMI LINEARI di m equazioni in n incognite; ossia i sistemi della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

Con la notazione matriciale questo sistema si scrive

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.28}$$

ove A è la MATRICE DEI COEFFICIENTI, il vettore $\mathbf{b}$ è il TERMINE NOTO, il vettore $\mathbf{x}$ è L'INCOGNITA:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

I numeri che figurano in queste espressioni possono essere reali oppure complessi.

Il sistema (2.27), equivalentemente il sistema (2.28) si dice OMOGENEO se il termine noto è nullo.

Vogliamo dare condizioni perché un sistema lineare ammetta soluzioni, e perché ammetta soluzione unica.

E' ovvio che ogni sistema lineare omogeneo è risolubile, e che una sua soluzione è $\mathbf{x} = 0$. In realtà, da quanto si è già visto:

Teorema 113 *L'insieme delle soluzioni di (2.28) con $\mathbf{b} = 0$ è il sottospazio $\ker A$.*

Se $\mathbf{b} \neq 0$, il sistema (2.28) ammette soluzioni se e solo se $\mathbf{b} \in \mathrm{im}A$.

Sia $\mathbf{b} \in \mathrm{im}A$ e sia $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. L'insieme delle soluzioni di (2.28) è

$$\mathbf{x}_0 + \ker A\,. \tag{2.29}$$

Il problema dell'unicità di soluzione si tratta in modo ugualmente semplice. Si noti che il sistema (2.28) è risolubile per certi vettori $\mathbf{b}$ (quelli in im$A$) e non risolubile per altri. Si potrebbe quindi pensare che, quando la soluzione esiste, per certi vettori $\mathbf{b}$ si trovi una sola soluzione mentre per altri si trovino più soluzioni. Si vede subito che questo non vale perché, da (2.29):

Teorema 114 *Il sistema lineare (2.28) ammette al più una soluzione esattamente quando $\ker A = \{0\}$. In particolare, se per un termine noto $\mathbf{b}_0$ la soluzione esiste ed è unica, allora per ogni altro termine noto $\mathbf{b}$ la soluzione o non esiste oppure, se siste, essa è unica.*

Inoltre, l'insieme delle soluzioni, se non è vuoto, si ottiene traslando il sottospazio $\ker A$, che ha una certa dimensione, diciamo ν. Dunque, nella determinazione della soluzione, troveremo che ν parametri rimangono liberi, e ciò *per ogni termine noto per il quale la soluzione esiste.*

Chiamiamo ora RANGO di una matrice la dimensione della sua immagine. Il rango di A si indica rank$A$. Il teorema 113 mostra che il sistema (2.28) è risolubile se e solo $\mathbf{b} \in \mathrm{im}A$ e quindi se e solo se le due matrici

$$A\,, \qquad \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

hanno la medesima immagine. Ossia:

Teorema 115 (DI ROUCHE–CAPELLI**)** *Il sistema (2.28) è risolubile se e solo se le due matrici*

$$A\,, \qquad \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

hanno il medesimo rango. In tal caso il sistema (2.28) ammette infinite soluzioni, dipendenti da ν "parametri liberi", con $\nu = \dim \ker A = n - \dim(\mathrm{im}(A))$.

Dim. Basta notare che le due matrici in (2.30) hanno lo stesso rango se e solo se hanno la stessa immagine.

E' ovvio che se hanno la stessa immagine allora hanno anche lo stesso rango. Il viceversa segue perché se l'aggiunta della colonna b non aumenta la dimensione dell'immagine allora $b \in \mathrm{im}\, A$ e le due matrici hanno la medesima immagine. ∎

Questo teorema mostra l'utilità di dare criteri "algebrici" per il calcolo del rango di una matrice. Sia per questo A una generica matrice. Consideriamo i determinanti delle matrici quadrate che si "estraggono" da A; ossia i numeri

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s \\ j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \dots & a_{i_1,j_s} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \dots & a_{i_2,j_s} \\ \vdots & & & \\ a_{i_s,j_1} & a_{i_s,j_2} & \dots & a_{i_s,j_s} \end{bmatrix}.$$

Il numero

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s \\ j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

si dice un MINORE DI ORDINE s della matrice A perché è il determinante di una matrice $s \times s$ estratta dalla A.

Vale

Teorema 116 (DI KRONECKER**)** *Il rango della matrice A è il massimo dei numeri r tali che almeno uno dei minori di ordine r è non nullo.*

2.9.1 Il metodo di riduzione di Gauss

Illustriamo un metodo per la soluzione dei sistemi lineari dovuto a Gauss e noto come METODO DI RIDUZIONE.

Con riferimento al sistema (2.27), è chiaro che:

1. cambiare l'ordine delle equazioni non muta né la risolubilità né il valore delle soluzioni del sistema.

   Cambiare l'ordine delle equazioni significa scambiare le righe della matrice in (2.28) e quelle corrispondenti di $\mathbf{b}$.

2. Sommando ad una riga combinazioni lineari di altre righe non altera nè la risolubilità del sistema nè il valore della soluzione. Si osservi che, con riferimento al sistema (2.28), sommare ad una riga del sistema una combinazione lineare di altre righe, vuol dire sommare ad una riga, per esempio la riga i, della matrice A le combinazioni lineari di altre righe e all'elemento i–mo di $\mathbf{b}$ le combinazioni lineari corrispondenti degli altri elementi di $\mathbf{b}$.

3. si può anche cambiare l'ordine in cui si susseguono le colonne di A. Ciò però richiede di permutare gli elementi di $\mathbf{x}$ (senza cambiare posizione a quelli di $\mathbf{b}$).

Dunque possiamo liberamente fare queste trasformazioni senza cambiare le soluzioni del sistema[6].

Procediamo ora come segue: scambiando tra loro le righe e le colonne, riportiamoci ad avere non nullo l'elemento in posizione $(1,1)$. Sommando la prima riga moltiplicata per $-a_{i,1}/a_{1,1}$ alla riga $i - ma$, si ottiene una matrice la cui prima colonna ha tutti gli elementi nulli salvo il primo.

Si noti che le operazioni corrispondenti vanno eseguite anche sugli elementi di $\mathbf{b}$. Per esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora le operazioni descritte trasformano A e $\mathbf{b}$ in

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la sottomatrice A_1 di A ottenuta ignorando la prima riga e la prima colonna e il sottovettore $\mathbf{b}_1$ di $\mathbf{b}$ ottenuto ignorando il primo elemento. Nell'esempio,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

[6] se si permutano colonne si risolverà un sistema non rispetto ad $\mathbf{x}$ ma rispetto al vettore $\tilde{\mathbf{x}}$ ottenuto permutando l'ordine degli elementi di $\mathbf{x}$. Si ritrova $\mathbf{x}$ applicando la permutazione opposta.

Ripetiamo su questa matrice e su questo vettore le operazioni consistenti nello scambiare righe e nel sommare ad una riga i multipli della prima, fino a trasformare A_1 in una matrice che ha nulli tutti gli elementi della prima colonna, salvo il primo.

Iterando una numero sufficiente di volte questo procedimento, si arriva a dare al sistema la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

ove $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ sono vettori ed A_{11}, A_{12} e 0 indicano matrici (le matrici 0 hanno tutti gli elementi nulli). La matrice A_{11} è quadrata mentre A_{12} è in generale rettangolare.

La matrice A_{11} è in forma TRIANGOLARE SUPERIORE,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3k} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4k} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

e gli elementi diagonali sono *non nulli.*

Se $k = n$ i vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{b}_1$ hanno dimensione n e la matrice in (2.31) è $A_{1\,1}$.

Si vede immediatamente che il sistema non è risolubile se $\mathbf{b}_2 \neq 0$. Se $k = n$ il sistema ha una e una sola soluzione, facilmente determinabile notando che $x_n = b_n/a_{nn}$ e tornando indietro passo passo, fino a trovare x_1.

Se $k < n$ e $\mathbf{b}_2 = 0$ allora c'è una sola soluzione con $\mathbf{x}_2 = 0$. Tutte le altre soluzioni si ottengono sommando a questa i vettori

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

con

$$A_{12}\mathbf{x}_2 = 0\,.$$

Si confronti il metodo di Gauss col metodo per il calcolo dei determinanti illustrato al paragrafo 1.1.6.

Alternativa di Fredholm

Torniamo a considerare il sistema di equazioni (2.27) L'incognita è un vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

i cui elementi sono le componenti rispetto alla base canonica, che è ortonormale. Ciò suggerisce che il prodotto interno debba avere un ruolo nello studio dei sistemi lineari. Ciò andiamo a vedere ora.

Ricordiamo il simbolo $X^\perp$:

$$X^\perp = \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in X\}\,.$$

Premettiamo:

Lemma 117 *Sia X un sottospazio di Φ^n. Vale:*

- $\mathbf{y} \in X$ *ed anche* $\mathbf{y} \in X^\perp$ *implica* $\mathbf{y} = 0$*;*
- $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \Phi^n$ *implica* $\mathbf{y} = 0$*.*
- $X = 0$ *se e solo se* $X^\perp = \Phi^n$*;*
- $X = \Phi^n$ *se e solo se* $X^\perp = 0$*;*

Notiamo ora che un modo indiretto di descrivere un sottospazio di Φ^n consiste nel descriverne l'ortogonale. Infatti, se X è noto, anche $X^\perp$ è noto; e viceversa noto $X^\perp$ anche X può calcolarsi:

Teorema 118 *Vale:*

$$X = (X^\perp)^\perp\,.$$

<u>Dim</u>. Mostriamo che vale l'inclusione

$$X \subseteq (X^\perp)^\perp$$

e poi proviamo che l'inclusione non può essere stretta.

Proviamo l'inclusione: mostriamo cioè che se $\mathbf{x} \in X$ allora vale anche $\mathbf{x} \in (X^\perp)^\perp$. Infatti, per ogni $\mathbf{y} \in X^\perp$ vale

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

(è questa proprio la definizione di $X^\perp$). Dunque, $\mathbf{x} \in X^\perp$, come si voleva provare.

Proviamo ora che l'inclusione non è stretta. Scegliamo $\mathbf{y} \in (X^\perp)^\perp$ e proviamo che $\mathbf{y} \in X$. Sia $\mathbf{z}$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{y}$ su $X \subseteq (X^\perp)^\perp$. Allora, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono elementi del sottospazio $(X^\perp)^\perp$ e quindi $\mathbf{y} - \mathbf{z} \perp (X^\perp)^\perp$. D'altra parte, $\mathbf{y} - \mathbf{z} \perp X$. Dunque,

$$\mathbf{y} - \mathbf{z} \in X^\perp\,, \qquad \mathbf{y} - \mathbf{z} \in (X^\perp)^\perp \quad \text{e quindi } \mathbf{y} - \mathbf{z} = 0\,.$$

Si ha dunque $\mathbf{y} = \mathbf{z} \in X$, come volevamo provare. ∎

Caratterizziamo ora $(\mathrm{im} A)^\perp$:

Teorema 119 *Vale* $\mathrm{im} A = (\ker A^*)^\perp$.

Dim. Proviamo l'inclusione

$$\mathrm{im}A \subseteq (\ker A^*)^\perp . \tag{2.32}$$

Dobbiamo provare che per ogni $\mathbf{x}$ si ha

$$A\mathbf{x} \perp \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \ker A^* .$$

Ciò vale perché se $A^*\mathbf{v} = 0$ allora

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{v}\rangle = 0 .$$

Vicevera proviamo l'inclusione opposta,

$$(\ker A^*)^\perp \subseteq \mathrm{im}A .$$

In questa dimostrazione useremo la (2.32) che è già stata provata.

Sia $\mathbf{w} \in (\ker A^*)^\perp$ e mostriamo che $\mathbf{w} \in \mathrm{im}A$ considerandone la proiezione ortogonale $\mathbf{z}$ su $\mathrm{im}A \subseteq [\ker A^*]^\perp$ e mostrando $\mathbf{w} = \mathbf{z}$.

La definizione di proiezione ortogonale è che $\mathbf{w} - \mathbf{z} \perp \mathrm{im}A$ ossia che

$$\langle \mathbf{w} - \mathbf{z}, A\mathbf{x}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} .$$

Dunque,

$$\langle A^*(\mathbf{w} - \mathbf{z}), x\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \text{e quindi } A^*(\mathbf{w} - \mathbf{z}) = 0 .$$

Abbiamo cioè $(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \in \ker A^*$. D'altra parte, $\mathbf{z} \in (\ker A^*)^\perp$ ossia

$$\mathbf{w} - \mathbf{z} \in \Big[(\ker A^*)^\perp\Big] \cap [\ker A^*] \quad \text{e quindi } \mathbf{w} = \mathbf{z} . \quad \blacksquare$$

Dal teorema precedente e dal Lemma 117 segue anche:

Corollario 120 *Sia ha:*

$$(\mathrm{im}A)^\perp = \Big((\ker A^*)^\perp\Big)^\perp = \ker A^* .$$

Notando che $(A^*)^* = A$, i risultati precedenti si riassumono come segue:

$\mathrm{imA} = (\ker A^*)^\perp$	$(\mathrm{im}A)^\perp = \ker A^*$
$\mathrm{im}A^* = (\ker A)^\perp$	$(\mathrm{im}A^*)^\perp = \ker A$

Dunque:

Teorema 121 *per il sistema (2.27), ossia (2.28), vale:*

- *il sistema è risolubile se e solo se* $\mathbf{b} \perp \ker A^*$*;*
- *la soluzione è unica se e solo se* $\mathrm{im} A^* = \Phi^n$*;*
- *il sistema è risolubile per ogni* $\mathbf{b}$ *se e solo se* $\ker A^* = 0$.

Considerando ora i due sistemi

$$\mathbf{i)} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \qquad \mathbf{ii)} \quad A^*\mathbf{v} = \mathbf{w}\,.$$

Vale:

Teorema 122 (Alternativa di Fredholm) *Il sistema* $\mathbf{i)}$ *è risolubile* per ogni $\mathbf{b}$ *se e solo se il sistema* $\mathbf{ii)}$ *ha* unicità *di soluzione; Il sistema* $\mathbf{ii)}$ *è risolubile* per ogni $\mathbf{w}$ *se e solo se il sistema* $\mathbf{i)}$ *ha* unicità *di soluzione.*

2.10 Endomorfismi ortogonali e isometrie

In questo paragrafo assumiamo che $\Phi = \mathbb{R}$ e studiamo le matrici ortogonali.

Se $\mathbf{v}$ è un vettore, in generale non c'é relazione tra $||\mathbf{v}||$ e $||A\mathbf{v}||$. Questo si vede facilmente notando che se A ha due autovalori diversi, per esempio 2 ed $1/2$, l'autovettore $\mathbf{v}$ di 2 viene trasformato in $2\mathbf{v}$ e quindi la sua lunghezza raddoppia. Invece, l'autovettore $\mathbf{w}$ di $1/2$ viene trasformato in $\mathbf{w}/2$ e la sua lunghezza si dimezza. Se però la matrice A è ortogonale, essa lascia invariata la lunghezza, e viceversa. Vale infatti:

Teorema 123 *Sia* A *una matrice ad elementi reali. Si equivalgono le affermazioni seguenti:*

$\mathbf{i)}$ *la matrice* A *è ortogonale;*

$\mathbf{ii)}$ *Vale* $\langle A\mathbf{w}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$ *per ogni coppia di vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*

$\mathbf{iii)}$ $||A\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$ *per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *e quindi* $||A(\mathbf{v} - \mathbf{w})|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$*;*

Dim. Proviamo che se la matrice è ortogonale allora $\langle A\mathbf{w}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$.

Infatti, se la matrice è ortogonale allora vale $\mathbf{ii)}$. Infatti,

$$\langle A\mathbf{w}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, A^T A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

La $\mathbf{ii)}$ con $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ dà la $\mathbf{iii)}$.

Viceversa, mostriamo che $\mathbf{ii)}$ implica $\mathbf{i)}$. Si fissi (arbitrariamente) $\mathbf{v}$ e si noti che, se vale $\mathbf{ii)}$ allora per ogni $\mathbf{w}$ si ha

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, A^T A\mathbf{v}\rangle\,.$$

Dunque, $\mathbf{v} = A^T A\mathbf{v}$. Ciò per ogni $\mathbf{v}$ e quindi $A^T A = I$.

Mostriamo ora che se vale **iii)** allora vale **ii)**. Notiamo prima di tutto, da **iii)**, che

$$||A\mathbf{v} - A\mathbf{w}||^2 = ||A(\mathbf{v} - \mathbf{w})||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 . \tag{2.33}$$

Si ha quindi

$$\langle A\mathbf{v} - A\mathbf{w}, A\mathbf{v} - A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle .$$

Sviluppando e usando $||A\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{v}||^2$, $||A\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{w}||^2$ si trova

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle . \quad \blacksquare$$

Esaminiamo alcune conseguenze importanti del Teorema 123:

Teorema 124 *Una matrice è ortogonale se e solo se trasforma una base ortonormale in una base ortonormale.*

Dim. Se la matrice è ortogonale essa conserva prodotti interni e norme, e quindi trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Viceversa, sia $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormale e supponiamo che anche $\{A\mathbf{e}_i\}$ sia una base ortonormale. Allora,

$$\left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A\mathbf{e}_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right\|^2 .$$

Dunque A conserva le norme e quindi è una matrice ortogonale. $\blacksquare$

Questa proprietà giustifica il considerare l'azione di matrici ortogonali come ROTAZIONI, eventualmente seguite da SIMMETRIE anche in $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$. Le rotazioni propriamente dette corrispondono alle matrici ortogonali con determinante $+1$, che ancora si chiamano MATRICI ORTOGONALI SPECIALI.

La (2.33) mostra che una trasformazione ortogonale lascia invariate le distanze: $\text{dist}(A\mathbf{v}, A\mathbf{w}) = \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Esistono anche trasformazioni non lineari che lasciano invariate le distanze, per esempio le traslazioni: se

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{h}$$

ove $\mathbf{h}$ è un vettore che non dipende da $\mathbf{v}$ allora

$$\text{dist}(\mathcal{T}\mathbf{v}, \mathcal{T}\mathbf{w}) = \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) . \tag{2.34}$$

Una trasformazione che lascia invariate le distanze, ossia una trasformazione per cui vale (2.34) per ogni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si chiama ISOMETRIA o TRASFORMAZIONE ISOMETRICA.

E' importante sapere che le isometrie di $\mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{T}(0) = 0$ sono tutte trasformazioni lineari descritte da matrici ortogonali. Proviamo prima di tutto il risultato seguente. Si noti che esso *non assume che la trasformazione $\mathcal{T}$ sia lineare: assume solo che sia un'isometria e che $\mathcal{T}(0) = 0$.*

Lemma 125 *Sia $\mathcal{T}$ una isometria di $\mathbb{R}^n$ e valga $\mathcal{T}(0) = 0$. La trasformazione $\mathcal{T}$ conserva sia la norma che il prodotto interno:*

$$\begin{array}{ll} \|\mathcal{T}(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\| & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\,, \\ \langle \mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle & \forall \mathbf{v}\,,\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Dim. La norma si conserva perché

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\| = \|\mathcal{T}(\mathbf{v}) - 0\| = \|\mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(0)\| = \|\mathbf{v} - 0\| = \|\mathbf{v}\|\,.$$

Noto ciò, è facile provare che anche il prodotto interno si conserva:

$$\langle \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w}), \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle = \|\mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w})\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle\,.$$

Sviluppando i prodotti interni e usando il fatto che $\mathcal{T}$ conserva le norme si trova

$$\langle \mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\,. \quad \blacksquare$$

Possiamo ora provare:

Teorema 126 *Una isometria $\mathcal{T}$ tale che $\mathcal{T}(0) = 0$ è lineare e quindi, per il Teorema 123, è rappresentata da una matrice ortogonale.*

Dim. Proviamo che $\mathcal{T}$ è una trasformazione lineare, ossia proviamo le due proprietà:

1. $\mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathcal{T}(\mathbf{v})$;
2. $\mathcal{T}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) + \mathcal{T}(\mathbf{w})$.

Dim. E':

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}) - \alpha\mathcal{T}(\mathbf{w})\|^2 &= \langle \mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}) - \alpha\mathcal{T}(\mathbf{w}), \mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}) - \alpha\mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle \\ &= \|\mathcal{T}(\alpha\mathbf{v})\|^2 - 2\alpha\langle \mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}), \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle + \alpha^2\langle \mathcal{T}(\mathbf{w}), \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle \\ &= \|\alpha\mathbf{v}\|^2 - 2\alpha\langle(\alpha\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle + \alpha^2\|\mathbf{w}\|^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Noto ciò, proviamo l'additività:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w})\|^2 &= \langle \mathcal{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w}), \mathcal{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{w})\rangle \\ &= \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{w}\|^2 = 0\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Questo risultato sottolinea ancora di più l'importanza anche per le applicazioni alla fisica, delle matrici ortogonali: *ogni isometria che lascia fissa l'origine è una rotazione.*

2.10.1 Le proprietà spettrali delle trasformazioni ortogonali

Studiamo ora le proprietà degli endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^n$. Fissata in $\mathbb{R}^n$ una base ortonormale, il teorema 112 asserisce che è indifferente lavorare con l'endomorfismo o con la sua rappresentazione matriciale. Quindi lavoriamo in concreto con le matrici, che indichiamo con la notazione A.

Ricordiamo che gli autovalori di una matrice ortogonale possono essere reali o meno. Per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ha autovalori } 1,\ i \text{ e } -i\,.$$

Dunque, quando si studiano gli autovalori e gli autovettori di una trasformazione, o matrice, ortogonale A in realtà si studiano quella della sua complessificata che per maggior chiarezza anche in questo paragrafo conviene indicare col simbolo $A_{\mathbb{C}}$.

Proviamo:

Teorema 127 *Sia A una trasformazione ortogonale da $\mathbb{R}^n$ in sé. La sua complessificata $A_{\mathbb{C}}$ è unitaria.*

Dim. Va provato che $(A_{\mathbb{C}})^* A_{\mathbb{C}} = I$. Usiamo la formula per $A_{\mathbb{C}}$ in (2.12) e quella per $(A_{\mathbb{C}})^*$ in (2.26). Si ha:

$$(A_{\mathbb{C}})^* A_{\mathbb{C}}(\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I) = (A_{\mathbb{C}})^*(A\mathbf{w}_R + iA\mathbf{w}_I) = A^*A\mathbf{w}_R + iA^*A\mathbf{w}_I = \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I\,. \quad \blacksquare$$

Proviamo ora:

Teorema 128 *Sia A una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Valgono queste proprietà:*

1. *Gli autovalori di A (ossia, quelli di $A_{\mathbb{C}}$!) hanno tutti modulo uguale ad 1.*
2. *Sia*
$$A_{\mathbb{C}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,, \quad A_{\mathbb{C}}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}\,, \qquad \lambda \neq \mu\,.$$
Allora, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Dim. Si ricordi che gli autovettori sono per definizione non nulli. La proprietà 1 vale perchè $||A\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$ e quindi, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, si ha

$$||\mathbf{v}|| = ||A\mathbf{v}|| = ||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{v}||\,.$$

Essendo $||\mathbf{v}|| \neq 0$ si trova $|\lambda| = 1$.

Proviamo 2. Dato che ogni autovalore ha norma 1, per esso vale

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \text{e quindi} \quad \bar{\lambda} = e^{-i\theta} = \frac{1}{\lambda}$$

trasformazione ortogonale conserva i prodotti interni:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \lambda\bar{\mu}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

e $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ perché $\lambda \neq \mu$. Essendo $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ segue $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$=0. ∎

Una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ può avere meno di n autovalori. Questo è per esempio il caso della trasformazione I che ha il solo autovalore 1 in ogni dimensione. Ciò noniostante:

Teorema 129 *Sia A una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ i cui elementi sono autovalori di $A_{\mathbb{C}}$.*

Dim. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovettori linearmente indipendenti di $A_{\mathbb{C}}$ e supponiamo $k < n$. Basta provare l'esistenza di un ulteriore autovettore linearmente indipendente da essi.

Consideriamo il sosttospazio X_k di $\mathbb{C}^n$:

$$X_k = \text{span}\,\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}\,.$$

Lo spazio X_k è invariante per $A_{\mathbb{C}}$ e quindi $X_k^{\perp}$ è invariante per $A_{\mathbb{C}}^*$:

$$A_{\mathbb{C}}^* X_k^{\perp} \subseteq X_k^{\perp}\,.$$

Dunque, in $X_k^{\perp}$ esiste un autovettore $\mathbf{x}$ di $A_{\mathbb{C}}^*$

$$A_{\mathbb{C}}^* \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}\,.$$

Si è visto che $A_{\mathbb{C}}^* = A_{\mathbb{C}}^{-1}$ e quindi $\alpha \neq 0$ e inoltre

$$A_{\mathbb{C}}^{-1}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \quad \text{ossia} \quad A_{\mathbb{C}}\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}\,.$$

Dunque, $\mathbf{x}$ è autovettore di $A_{\mathbb{C}}$ linearmente indipendente dai $\mathbf{v}_j$ perché ad essi ortogonale. ∎

Combinando il Corollario 87 con la prima affermazione del Teorema 128 si trova:

Teorema 130 *Ogni automorphismo ortogonale di $\mathbb{R}^n$ con n dispari ha (almeno) un autovalore uguale a $+1$ oppure a -1.*

Nel corso della dimostrazione del Teorema 129 abbiamo visto che $X_k^{\perp}$ è invariante non solo per $A_{\mathbb{C}}^*$ ma anche per $A_{\mathbb{C}}$. Una proprietà analoga vale anche in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 131 *Sia A una matrice $n \times n$ ortogonale (e quindi ad elementi reali!) e sia X un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Se $AX \subseteq X$ allora si ha anche $AX^{\perp} \subseteq X^{\perp}$ (l'ortogonale essendo calcolato nel prodotto interno di $\mathbb{R}^n$). Inoltre, valgono le uguaglianze*

$$AX = X\,, \qquad AX^{\perp} = X^{\perp}\,.$$

Dim. La matrice ha elementi reali e quindi la sua aggiunta è la trasposta A^T e si sa che

$$A^T X^\perp \subseteq X^\perp .$$

Dunque,

$$A^T X^\perp = A^{-1} X^\perp \text{ ha dimensione minore o uguale a } X^\perp .$$

Ma la dimensione non può essere strettamente minore perché A^{-1} è invertibile. E quindi

$$A^{-1} X^\perp = X^\perp \quad \text{così che} \quad A X^\perp = X^\perp .$$

In modo analogo si vede che $AX = X$. ∎

Il risultato seguente è particolarmente importante per le applicazioni:

Teorema 132 *Se A è una* rotazione *di $\mathbb{R}^n$ ed inoltre n è* dispari *allora 1 è autovalore di A.*

Dim. In questa dimostrazione usiamo ripetutamente le proprietà elencate nel Teorema 85.

Le rotazioni sono descritte da trasformazioni ortogonali speciali. Sia dunque A una matrice ortogonale speciale.

Si sa che A ammette autovalori reali e quindi $+1$ e, oppure, -1. Se, calcolando gli autovalori, si trova che uno di essi è $+1$ niente altro va provato. Supponiamo di aver trovato che -1 è autovalore di A e quindi anche di di $A_{\mathbb{C}}$ e proviamo che anche $+1$ è autovalore di $A_{\mathbb{C}}$ e quindi di A. Si sa dalla proprietà 2a del Teorema 85 che esiste un autovalore reale $\mathbf{v}_1$ tale che

$$A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 , \qquad \|\mathbf{v}_1\| = 1 .$$

Lo spazio $X = \{t\mathbf{v}_1 ,\ t \in \mathbb{R}\}$ è invariante per A e quindi anche $X^\perp$ è invariante per A.

Scegliamo una qualunque base ortonormale di $X^\perp$. Sia essa $\{\mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n\}$. La base $\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e in questa base la matrice A assume la forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] .$$

La matrice A_1 è essa stessa ortogonale ed ha dimensioni $(n-1) \times (n-1)$ e quindi pari mentre i simboli "0" indicano un a riga e una colonna di numeri "0".

La matrice A_1 è essa stessa ortogonale e quindi i suoi autovalori sono tutti di modulo 1 e quelli complessi sono coniugati a coppie. Dunque, gli autovalori complessi sono in numero pari e quindi anche quelli reali sono in numero pari.

Si sa che $\det A_1$ è il prodotto degli autovalori e il prodotto di quelli complessi è positivo perché

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 .$$

Se tutti gli autovalori reali di A_1 sono uguali a -1 il loro prodotto è $+1$ perché essi sono in numero pari. Quindi $\det A < 0$, contro l'ipotesi.

Dunque la matrice A_1 ha un numero dispari di autovalori uguali a $+1$. ∎

2.10.2 L'asse di simmetria delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$

Le rotazioni di un corpo rigido in $\mathbb{R}^3$ sono descritte da trasformazioni ortogonali speciali e, come si è provato, tali trasformazioni ammettono un autovalore uguale a $+1$. Sia $\mathbf{v}$ un autovettore (reale) di $+1$ e sia

$$V = \{t\mathbf{v}\,, \quad t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dunque V è invariante per A e, come si è visto al Teorema 131, anche $V^\perp$ è invariante per A.

La restrizione di A a $V^\perp$ a sua volta è una rotazione su $V^\perp$, che ha dimensione 2. Dunque ha la forma particolare descritta al paragrafo 1.7.1 e quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

In questa rappresentazione il sottospazio V viene ad essere l'asse delle ascisse.

Si osservi ora che non solo il sottospazio V è invariante ma *tutti i suoi elementi non vengono mutati da A.* Per questa ragione la matrice A si interpreta come *rotazione intorno all'asse delle ascisse.*

Si ricordi ora (dal paragrafo 1.7.1) che in $\mathbb{R}^2$ tutte le rotazioni commutano e quindi:

Teorema 133 *In $\mathbb{R}^3$ valgono le proprietà seguenti:*

1. *ogni rotazione lascia invariati i punti di una retta, che si chiama* ASSE DI ROTAZIONE.
2. *Tutte le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ che hanno il medesimo asse di rotazione commutano.*

Notiamo che l'asse di rotazione non è necessariamente unico. Però, se ce ne sono due, allora la matrice A viene ad avere due autovalori uguali ad 1 e quindi anche il terzo è uguale ad 1, ossia $A = I$. In questo caso la rotazione è "banale" nel senso che nessun punto viene cambiato di posto dalla "rotazione".

2.11 Diagonalizzazione delle matrici simmetriche

Ci interessa questo argomento per le applicazioni che ne faremo alla geometria analitica al paragrafo 2.12. Quindi lavoriamo con matrici reali. E' però vero che argomenti analoghi valgono anche per matrici autoaggiunti (in tal caso la trasformazione di coordinate sarà unitaria). Dunque

Lavoriamo nello spazio $\mathbb{R}^n$ riferito ad una base ortonormale.

Mostriamo ora:

Teorema 134 *Sia A una matrice simmetrica:*

1. *gli autovalori di A sono reali.*
2. *siano λ e μ autovalori* diversi *di A e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ corrispondenti autovettori. Allora, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$, ossia essi sono mutuamente ortogonali.*

Dim. Proviamo 1. Sia λ un autovalore e sia $\mathbf{v}$ un corrispondente autovettore. Sia ha

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda ||\mathbf{v}||^2$$

ma anche, essendo $A = A^T$,

$$\lambda ||\mathbf{v}||^2 = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^T\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} ||v||^2 \,.$$

Essendo $\mathbf{v} \neq 0$, si ha

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

e quindi λ è reale.

Proviamo 2. Per ipotesi,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \,, \qquad A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w} \,, \qquad \lambda \neq \mu \,.$$

Si sa già che λ e μ sono reali. Moltiplichiamo scalarmente la prima uguaglianza per $\mathbf{w}$ e la seconda per $\mathbf{v}$. Si trova

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda}\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle &= \langle A^*\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \,. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si trova

$$0 = (\lambda - \mu)\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$$

e quindi $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ perché $\lambda \neq \mu$. ∎

Dunque:

Corollario 135 *Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica che ha esattamente n autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Esiste in $\mathbb{R}^n$ una base ortonormale di autovettori di A.*

Basta infatti scegliere n autovettori di norma 1, il k-mo corrispondente all'autovalore λ_k.

Però esistono matrici simmetriche che hanno meno autovalori della dimensione dello spazio. Un'esempio è la matrice identità che ha un'unico autovalore. L'asserto del Corollario 135 vale anche in questo caso. Ricordiamo ora il Teorema 131 che particolarizziamo al caso delle matrici simmetriche:

Teorema 136 *Sia A una matrice $n \times n$ e sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio. Se $AX \subseteq X$ allora $A^T X^\perp \subseteq X^\perp$.*

Nel caso particolare delle matrici simmetriche, $A = A^T$ e quindi un sottospazio X è invariante per A se e solo se anche $X^\perp$ è invariante per A.

Proviamo ora:

Teorema 137 *Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica. Esiste in $\mathbb{R}^n$ una base ortonormale di autovettori di A.*

Dim. Il teorema va provato senza fare ipotesi sul numero degli autovalori. Comunque, ricordiamo, almeno un autovalore esiste e gli autovalori sono reali. Quindi si possono ordinare in modo crescente.

Sia λ_1 il più piccolo autovalore di A e sia

$$X_1 = \text{span}\{\mathbf{v}\,,\ A\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}\}\,. \qquad \text{Si noti che } AX_1 \subseteq X_1.$$

Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ allora si scelga una qualsiasi base ortonormale di X_1. Questa viene ad essere una base ortonormale di autovalori di A.

Se $X_1 \neq \mathbb{R}^n$ allora $X_1^\perp \neq 0$ e

$$AX_1 \subseteq X_1 \implies A^T X_1^\perp = AX_1^\perp \subseteq X_1^\perp\,.$$

La trasformazione A_1: $X_1^\perp \mapsto X_1^\perp$ che è la restrizione di A ad $X_1^\perp$ è essa stessa una trasformazione simmetrica. Gli autovettori di A_1 sono anche autovettori di A e quindi gli autovalori di A_1 sono anche autovalori di A. Dunque, il più piccolo autovalore di A_1 è λ_2, il secondo autovalore di A. Ad esso associamo

$$X_2 = \text{span}\{\mathbf{v} \in X_1\,,\ A\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}\}\,.$$

Una base ortonormale di X_2 è in particolare una base consistente di autovettori di A tutti ortogonali a quelli già scelti in X_1 perché $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Il sottospazio $X_3 = \text{span}\{X_1, X_2\}$ è invariante per A e quindi anche $X_3^\perp$ lo è.

Si ripeta la procedura in X_3 e si iteri il procedimento fino ad un sottospazio X_k tale che span $\{X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_k\} = \mathbb{R}^n$. ∎

Ricapitolando, se A è una matrice $n \times n$ simmetrica, esiste una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1\,, \cdots\,, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ i cui elementi sono autovettori di A ordinati in modo che i corrispondenti autovalori siano crescenti (oppure, come spesso si fa, decrescenti).

Rispetto a questa base ortonormale di autovettori, la matrice simmetrica A assume la forma

$$M_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

I numeri λ_i sono gli autovettori, e quindi sono *reali*, non necessariamente due a due diversi.

Ricordiamo che la matrice A era inizialmente data rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ (in pratica la base canonica di $\mathbb{R}^n$). La trasformazione T che pone la matrice A in forma diagonale trasforma la base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ nella base ortogonale $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ e quindi, per il Teorema 124 la trasformazione è ortogonale. Potrebbe avere determinante -1. Peró cambiando il segno di $\mathbf{v}_1$ si cambia il segno della prima colonna di T e quindi si cambia il segno del suo determinante. Dunque, scegliendo in modo opportuno il segno degli autovettori si trasforma la matrice ortogonale T in una matrice ortogonale speciale.

Ricapitolando: ogni matrice simmetrica, è diagonalizzabile mediante un cambiamento di coordinate e la matrice di cambiamento di coordinate è ortogonale speciale.

2.12 Coniche e quadriche

Mostriamo ora come gli argomenti precedenti possano usarsi per studiare equazioni di secondo grado in due o tre variabili[7]:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(\alpha x + \beta y) = k \tag{2.35a}$$

$$\text{ossia } \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = k \text{ con } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{2.35b}$$

nel caso di due variabili e, nel caso di tre variabili,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = k \tag{2.36a}$$

$$\text{ossia } \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = k \text{ con} A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \tag{2.36b}$$

Si noti che in ambedue i casi la matrice A è simmetrica e quindi può diagonalizzarsi con un'oppurtuna rotazione degli assi coordinati.

[7] i fattori 2 sono ovviamente ininfluenti. Sono stati inseriti solamente per semplificare i calcoli successivi.

Diagonalizzare la matrice significa fare scomparire i termini misti di secondo grado. Quest'idea può essere seguita per ridurre le equazioni a certe FORME CANONICHE già studiate ai paragrafi 1.16 e 1.17.

2.12.1 Le quadriche in posizione generale

Vedremo che le equazioni (2.35a)-(2.36b) rappresentano coniche oppure quadriche "in posizione generale" rispetto agli assi coordinati; ossia per esempio si potrà avere il caso di un'ellisse i cui assi non si sovrappongono agli assi coordinati. Inoltre, per certi valori dei parametri che compaiono nelle equazioni, le coniche e le quadriche potrebbero essere "degeneri". Per esempio l'ellisse potrebbe collassare nel suo centro. Per studiare le equazioni (2.35a)-(2.36b) procediamo in due fasi:

1. in questo paragrafo riscriviamo le equazioni in "forma canonica" mediante opportune rotazioni e traslazioni degli assi coordinati. Ciò facciamo considerando esplicitamente il caso dell'equazione in tre variabili. I risultati analoghi per l'equazione in due variabili verranno solo enunciati.

   Vedremo che le equazioni si riducono a quelle studiate al paragrafo 1.16 ma che si possono anche avere casi degeneri.

2. Al paragrafo (2.12.2) vedremo come capire se si presentano i casi degeneri.

Sia P la matrice ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica A,

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Assumiamo $A \neq 0$, altrimenti la (2.36a) si riduce all'equazione di un piano. Dunque, almeno uno degli autovalori è diverso da zero.

La rotazione di coordinate

$$\mathbf{v} = P\mathbf{x}$$

trasforma la (2.36a) nell'equazione

$$\langle \mathbf{x}, \Lambda\mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, P\mathbf{x} \rangle = k \tag{2.38}$$

e si noti che

$$\langle \mathbf{b}, P\mathbf{x} \rangle = \langle P^T\mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = \langle P^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$$

perché P è una matrice ortogonale.

La forma diagonale della matrice Λ suggerisce di distinguere i due casi seguenti:

Caso parabolico: quando almeno uno degli autovalori di Λ è nullo;

Caso non parabolico: quando i tre autovalori sono tutti non nulli. Vedremo che questo caso a sua volta si divide in due altri, ellittico ed iperbolico.

Notiamo che questa classificazione riguarda solo il complesso dei termini di secondo grado del polinomio, ossia riguarda solo il polinomio

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz\,.$$

Un polinomio in due o più variabili con tutti i monomi dello stesso grado si chiama una FORMA e, se il grado è 2 si chiama una FORMA QUADRATICA mentre se il grado è 1 si parla di FORMA LINEARE. Dunque,

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 2\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

è una forma lineare.

Il "caso parabolico" è in realtà una classificazione della sola forma quadratica $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$. Per questo si dice, più correttamente che:

> La forma quadratica
>
> $$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$
>
> è PARABOLICA quando uno almeno degli autovalori di A è nullo. Ricordando che $\det A$ è il prodotto degli autovalori si vede che la forma quadratica è parabolica se e solo se $\det A = 0$.

Nel caso parabolico, chiamando λ_1 l'autovalore che è nullo e ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \\ P^{-1}b &= \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

l'equazione si scrive

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2(\tilde{b}_1 x + \tilde{b}_2 y + \tilde{b}_3 z) = k\,. \tag{2.39}$$

Potrebbe anche essere $\lambda_2 = 0$ ma allora $\lambda_3 \neq 0$ e, se $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ i due autovalori possono avere lo stesso segno o segno opposto.

Se i due autovalori sono non nulli e se per es. $\tilde{b}_2 = \tilde{b}_3 = 0$ mentre $b_1 \neq 0$ si ritrovano i paraboloidi studiati al paragrafo 1.17 e ciò giustifica il termine di "forma quadratica parabolica". Si noti però che se $\tilde{b}_r = 0$ per $r = 1\ 2\ 3$ allora la superficie non è un paraboloide: è un cilindro con asse parallelo all'asse delle ascisse. Consideriamo questo un "caso degenere".

Come identificare il caso degenere verrà discusso nel paragrafo 2.12.2.

Prima di considerare il caso non parabolico, notiamo che l'Eq. (2.39) si può ulteriormente semplificare COMPLETANDO I QUADRATI. Supponiamo che sia $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$. In tal caso scriviamo la (2.39) come

$$\left(\sqrt{\lambda_2}y + \frac{\tilde{b}_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + 2\tilde{b}_1 x + 2\tilde{b}_3 z = k + \frac{\tilde{b}_2^2}{\lambda_2}\,. \tag{2.40}$$

Se si ha anche $\lambda_3 \neq 0$ lo stesso procedimento dà

$$\left(\sqrt{\lambda_2}y + \frac{\tilde{b}_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_3}z + \frac{\tilde{b}_3}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2 + 2\tilde{b}_1 x = k + \frac{\tilde{b}_2^2}{\lambda_2} + \frac{\tilde{b}_3^2}{\lambda_3}\,. \tag{2.41}$$

Queste equazioni, se non corrispondono a casi degeneri, sono quelle di due paraboloidi centrati, invece che nell'origine, rispettivamente nei punti

$$(0, -\tilde{b}_2/\lambda_2, 0),, \qquad (0, -\tilde{b}_2/\lambda_2, -\tilde{b}_3/\lambda_3)\,.$$

Si noti che l'operazione di completamento dei quadrati corrisponde ad una traslazione degli assi coordinati.

Supponiamo ora che i tre autovalori siano non nulli, ossia che A sia invertibile. Indichiamo ancora con P la matrice ortogonale che diagonalizza A: $\Lambda = P^{-1}AP$ come in (2.37). Sostituendo

$$\mathbf{v} = P\mathbf{w}$$

si ottiene l'equazione (2.38) dove ora scriviamo $\mathbf{w}$ al posto della notazione $\mathbf{x}$. La ragione è che ora la matrice Λ è invertibile e quindi si possono completare i quadrati. Scrivendo

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} - \Lambda^{-1}P^{-1}b$$

si vede che $\mathbf{x}$ risolve[8]

$$\langle \mathbf{x}, \Lambda\mathbf{x}\rangle = k + \langle \Lambda^{-1}P^{-1}b, P^{-1}b\rangle = k + \langle b, Ab\rangle\,.$$

In questo caso l'equazione (2.38) assume la forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = k + \langle \Lambda^{-1}P^{-1}b, P^{-1}b\rangle = k + \langle b, Ab\rangle \tag{2.42}$$

e, a seconda dei segni, concordi o meno, degli autovalori si trovano gli iperboloidi e gli ellissoidi studiati al paragrafo 1.16. Se il secondo membro è nullo si hanno casi degeneri casi degeneri che verranno studiati al paragrafo 2.12.2.

[8] si ricordi che $(P^{-1})^* = P$.

Ricapitolazione

La forma quadratica $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$ è:

Se in due variabili, ossia se la matrice A è 2×2:

ELLITTICA se i due autovalori hanno lo stesso segno (e allora si può supporre che siano positivi)

IPERBOLICA se un autovalore è positivo ed uno negativo.

PARABOLICA se uno degli autovalori è nullo.

Se in tre variabili, ossia se la matrice A è 3×3:

ELLITTICA se i tre autovalori hanno lo stesso segno (e allora si può supporre che siano positivi)

IPERBOLICA se due autovalori hanno lo stesso segno ed il terzo ha segno opposto.

PARABOLICA se uno almeno degli autovalori è nullo.

Abbiamo visto che il caso parabolico si identifica facilmente senza dover calcolare gli autovalori della matrice A. Cerchiamo di capire se anche i casi ellittico ed iperbolico possono identificarsi senza calcolare esplicitamente gli autovalori.

Ciò è facile nel caso delle forme in due variabili perché in questo caso ci sono solo due autovalori e quindi o hanno segno concorde o hanno segno discorde. Il primo caso corrisponde al fatto che il loro prodotto è positivo e il prodotto degli autovalori di una matrice 2×2 ne è il determinante. Dunque:

Teorema 138 *Una forma quadratica $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$ in due variabili, ossia con A matrice 2×2 è parabolica, ellittica, iperbolica se $\det A$ è nullo, positivo o negativo.*

Anche se l'equazione è in tre variabili il caso parabolico è identificato da $\det A = 0$ ma il segno del determinante non basta a distinguere il caso ellittico dal caso iperbolico. Per esempio si ha $\det A > 0$ sia quando i tre autovalori sono positivi che quando due sono negativi ed uno positivo. Aiuta allora il seguente risultato, che si chiama REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO.

Si considera il polinomio caratteristico della matrice A. Ricordiamo che le sue radici sono gli autovalori di A che sono reali, perché A è simmetrica[9]. Si scrive il

[9] questa informazione preliminare, che le radici sono reali, è essenziale per la validità della regola dei segni di Cartesio.

polinomio ordinandolo nel senso delle potenze decrescenti

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 :$$

il polinomio ha quattro coefficienti di cui il primo è positivo.

Alcuni degli altri coefficienti potrebbero essere nulli. In tal caso il termine corrispondente non si scrive. Dunque il polinomio è somma di al più quattro monomi non nulli e i coefficienti non nulli sono *almeno due*. Infatti il polinomio caratteristico si riduce al solo monomio λ^3 quando $A = 0$ e questo caso nello studio delle quadriche non si presenta.

Ora guardiamo i coefficienti a partire da quello di λ^3 e, ripetiamo, trascurando quelli nulli. Diciamo che si presenta una variazione quando due coefficienti consecutivi hanno segno opposto. Si ha:

Teorema 139 (Regola dei segni di Cartesio) *Un polinomio a coefficienti reali e con tutte le radici reali ha tante radici positive (contate con la loro molteplicità) quante sono le variazioni di segno dei suoi coefficienti.*

Facciamo alcuni esempi:

- il polinomio $\lambda^2 - 1$ ha una variazione ed una sola radice positiva;
- il polinomio $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ non ha variazioni e quindi, *se si può preventivamente mostrare che ha radici reali* le sue radici sono negative. Questo è il caso perché $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$
- il polinomio $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ha due variazioni. Questo polinomio è $(\lambda - 1)^2$. Ha una sola radice (positiva) ma di molteplicità due. Essa va contata due volte.
  - il polinoimio $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$ non ha variazioni e non ha radici positive. Questo si vede immediatamente perché se $\lambda > 0$ il polinomio è somma di numeri positivi. Però in questo caso la regola di Cartesio non si applica perché il polinomio ha anche radici complesse:

    $$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)\,.$$

    Per contrasto, consideriamo l'esempio seguente.
  - il polinomio $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$ ha tre variazioni ma il polinomio ha *una sola* radice positiva. Infatti, $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$: la regola di Cartesio non si applica a questo polinomio che ha anche radici non reali e, se si prova ad applicarla, si trova un risultato sbagliato.

Grazie alla regola dei segni di Cartesio possiamo concludere:

Teorema 140 *Sia $p(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice in (2.36b). La forma quadratica è:*

parabolica: *quando* $p(0) = 0$*;*

ellittica: *quando* $p(0) \neq 0$ *e il polinomio ha tre variazioni oppore nessuna variazione;*

iperbolica: *quando* $p(0) \neq 0$ *e il polinomio ha una sola variazione oppure due variazioni.*

In conclusione, abbiamo visto che una opportuna trasformazione di coordinate ortogonali eventualmente seguita da una traslazione riconduce l'equazione (2.36a) alle equazioni delle quadriche in forma canonica già studiate. In questo senso diciamo che le equazioni (2.35a) e (2.36a) rappresentano rispettivamente coniche oppure quadriche "in posizione generale" rispetto agli assi coordinati. Però, potrebbero presentarso dei casi degeneri. Per esempio nel caso ellittico l'equazione della conica potrebbe ridursi a $x^2 + y^2 = 0$. In questo caso l'ellisse degenera nell'origine degli assi coordinati. Nel caso iperbolico l'equazione potrebbe ridursi a $x^2 - y^2 = 0$ e in questo caso l'iperbole degenera nelle due rette $x = y$ ed $x = -y$. La "degenerazione" però dipende dai coefficienti dei termini di grado inferiore a 2 e quindi non si può vedere esaminando solo la forma quadratica. *Per capire se la conica "degenera" bisogna in qualche modo esaminare* tutti *i coefficienti dell'equazione.*

Ricapitolando, la classificazione in parabolico, iperbolico o ellittico dipende dal complesso dei termini di secondo grado e quindi dai segni degli autovalori della matrice A. I termini di grado inferiore non intervengono. Grazie alla regola dei segni di Cartesio, la classificazione può farsi senza bisogno di ridurre A a forma diagonale e senza nemmeno calcolare esplicitamente gli autovalori. Da quanto detto fino ad ora sembra invece che i casi degeneri si possano identificare solamente dopo aver esplicitamente diagonalizzato la matrice A. Nel prossimo paragrafo vedremo un test semplice che permette di capire se siamo o meno in presenza di coniche degeneri senza diagonalizzare A.

Osservazione 141 Torniamo a considerare l'iperbole degenere $x^2 - y^2 = 0$ e l'ellisse degenere $x^2 + y^2 = 0$.

Fattorizzando $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ si vede che l'iperbole degenera in due rette. Invece l'ellisse $x^2 + y^2 = 0$ degenera nell'origine degli assi coordinati nel senso che $(0, 0)$ è l'unica soluzione dell'equazione. Ciò però è vero se ricerchiamo soluzioni reali dell'equazione ma tra i numeri complessi si può scrivere

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) \ :$$

anche in questo caso il trinomio di secondo grado si fattorizza nel prodotto di due binomi di primo grado (a coefficienti complessi). Si può dire che l'ellisse degenera in due "rette immaginarie". ∎

2.12.2 Come identificare i casi delle coniche e quadriche degeneri

Per maggior chiarezza conviene esaminare prima il caso delle coniche. Consideriamo quindi l'equazione (2.35a) che riscriviamo come segue

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - k = 0\,. \tag{2.43}$$

Conviene introdurre un ulteriore parametro reale t e riscrivere questa equazione come segue:

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\alpha xt + 2\beta yt - kt^2 \\ & = \begin{bmatrix} x & y & t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \alpha \\ a_{1\,2} & a_{2\,2} & \beta \\ \alpha & \beta & -k \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Questa è l'equazione di un cono in $\mathbb{R}^3$. Il cono ha vertice nell'origine e la conica (2.43) si trova imponendo $t = 1$ ossia intersecando il cono col piano $t = 1$ (al paragrafo 1.15.6 abbiamo ottenuto le coniche in forma canonica sezionando col piano $z = 1$ un cono ruotante. Qui il discorso è un po' diverso: il cono è fissato e la sua natura dipende dai coefficienti).

Consideriamo ora quali sono i casi degeneri che si possono incontrare nel caso delle coniche e vediamo come questi si ottengono sezionando il cono. Guardiamo le equazioni in forma canonica che sono la (2.40) per il caso parabolico e la (2.42) per il caso ellittico e iperbolico. Però ora in queste equazioni dobbiamo ignorare la variabile z perché stiamo lavorando con coniche invece che con quadriche.

caso parabolico: da (2.40) (in cui si ignora la variabile z) si vede che si ha il caso degenere quando $b_1 = 0$. In questo caso la parabola degenera in due rette parallele all'asse x (che potrebbero anche coincidere) e quindi il cono (2.44) degenera in un diedro (che a sua volta può degenerare in un solo piano).

caso iperbolico: l'equazione è la (2.42) in cui non compare la variabile z e $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Si ha una iperbole degenere quando il termine noto è zero e in questo caso l'iperbole degenera in due rette che si intersecano. Nuovamente, il cono (2.44) degenera in due piani.

caso ellittico: l'equazione è ancora la (2.42) in cui non compare la variabile z ma $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Il caso del termine noto nullo corrisponde all'ellisse che degenera nell'origine di $\mathbb{R}^2$. In questo caso il cono degenera in una retta.

Osservazione 142 Nel caso parabolico degenere se il membro destro è negativo l'equazione non ammette soluzioni e le rette "non esistono" o, per meglio dire, l'equazione ha soluzioni complesse: il trinomio di secondo grado si fattorizza in due monomi di primo grado a coefficienti complessi e quindi la parabola degenera in due

"rette immaginarie". Confrontando questa osservazione con la 141 si vede che: *la proprietà comune a tutti i casi delle coniche degeneri è che il trinomio di secondo grado* in due variabili *si fattorizza in binomi di primo grado (anch'essi* in due variabili*) a coefficienti reali o complessi.*

Nel caso ellittico può accadere che il termine noto in (2.42) abbia segno opposto a quello degli autovalori. In questo caso l'ellisse "non esiste" nel senso che nessun punto a coordinate reali soddisfa l'equazione. Però soluzioni esistono se si ricercano tra i numeri complessi. In questo caso si dice che L'ELLISSE È IMMAGINARIA. Questo caso non viene considerato degenere perché il trinomio di secondo grado in due variabili non si fattorizza in binomi di primo grado.

Ora si noti che, per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, ogni polinomio in *una variabile* si fattorizza in polinomi di primo grado a coefficienti reali o complessi. Nel caso dei polinomi (di grado due) in due o tre variabili ció accade solo se il polinomio corrisponde ad una conica o quadrica degenere: da un punto di vista algebrico la ricerca delle coniche o quadriche degeneri coincide con la ricerca di quei polinomi di grado due e in due o tre variabili che possono fattorizzarsi in fattori di primo grado. ∎

Riassumendo, le coniche degeneri si incontrano solamente quando il cono (2.44) si riduce a due piani (eventualmente coincidenti) o ad una retta.

La matrice B è simmetrica e quindi essa stessa è diagonalizzabile. Diagonalizzandola, l'equazione del cono prende la forma

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 t^2 = 0\,.$$

Il cono degenera e si riduce a due piani o ad una retta quando almeno uno degli autovalori è nullo, ossia quando $\det B = 0$. Si noti che se per esempio $\mu_3 = 0$ e $\mu_1\mu_2 > 0$ allora l'equazione si fattorizza tra i numeri complessi. Per esempio se μ_1 e μ_2 sono positivi si ha

$$0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 = (\sqrt{\mu_1}x + i\sqrt{\mu_2}y)\,(\sqrt{\mu_1}x - i\sqrt{\mu_2}y)$$

e il cono si riduce ai due "piani complessi"

$$\sqrt{\mu_1}x + i\sqrt{\mu_2}y = 0\,, \qquad \sqrt{\mu_1}x - i\sqrt{\mu_2}y = 0$$

Questi due "piani complessi" hanno in comune la retta reale $(0,0,t)$ e intersecano il piano $t = 1$ in un solo punto reale: è il caso in cui l'ellisse degenera in un punto.

La matrice B si chiama la MATRICE DELLA CONICA.

Teorema 143 *La conica (2.35a) è degenere se e solo se la sua matrice ha determinante nullo:* $\det B = 0$.

Il caso delle quadriche si esamina nello stesso modo. Introduciamo in (2.36a) l'ulteriore parametro reale t in modo da ottenere l'equazione

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2(\alpha xt + \beta yt + \gamma zt) - kt^2 = 0\,. \qquad (2.45)$$

Questa è l'equazione di un cono di $\mathbb{R}^4$ e le quadriche si ottengono intersecando questo cono con l'iperpiano $t = 1$ che ora è il traslato di un sottospazio di dimensione 3.

Esaminiamo quali casi degeneri si poissono incontrare nelle equazioni delle quadriche. Guardiamo nuovamente le equazioni in forma canonica che sono ancora le equazioni (2.39) per il caso parabolico e la (2.42) per il caso ellittico e iperbolico. Naturalmente ora la variabile z va considerata.

caso parabolico: in questo caso l'equazione è la (2.39) da cui si vede immediatamente:

il caso $\tilde{b}_1 = 0$: in questo caso la quadrica degenera in un cilindro di generatrici parallele all'asse x.

il caso $\tilde{b}_1 \neq 0$: in questo caso esaminiamo separatamente i due sottocasi $\lambda_2\lambda_3 = 0$ e $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Ricordiamo che l'equazione si scrive nella form (2.40) quando un solo autovalore di A è non nullo e nella forma (2.41) quando due sono non nulli. Esaminiamo separatamente questi casi:

un solo autovalore non nullo, Eq. (2.40) sostituendo

$$\begin{aligned}
\eta &= \lambda_2 y + \tilde{b}_2/\lambda_2\,, \\
\xi &= 2\tilde{b}_1 x + 2\tilde{b}_3 z - (k + \tilde{b}_2^2/\lambda_2^2)\,, \\
\zeta &= z
\end{aligned}$$

si trova l'equazione

$$\eta^2 + \xi = 0\,.$$

Rispetto agli assi (ξ, η, ζ) questa è l'equazione di un cilindro (di asse parallelo all'asse ζ) e questo caso si considera il caso di un paraboloide degenere.
se ambedue i coefficienti $\tilde{b}_1$ e $\tilde{b}_3$ sono nulli il cilindro a sua volta degenera in due piani.

due autovalori non nulli, Eq. (2.41) si ha un cilindro solo se $\tilde{b}_1 = 0$, come abbiamo già visto.

il caso iperbolico o ellittico: è il caso dell'equazione (2.42) che degenera solo se il secondo membro è nullo. Più precisamente, limitandoci a considerare soluzioni reali, si ha:

caso iperbolico: l'iperboloide degenera in un cono.

caso ellittico: l'ellisse degenera nell'origine degli assi.

Ancora, vogliamo capire come decidere se la quadrica è degenere senza dover ridurre la matrice A a forma diagonale. Per questo consideriamo ancora la matrice seguente, che si chiama la MATRICE DELLA QUADRICA:

$$\begin{bmatrix} a & d & e & \alpha \\ d & b & f & \beta \\ e & f & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & -k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{b}^T & -k \end{array}\right] \tag{2.46}$$

A destra abbiamo scritto la matrice "a blocchi": A è la matrice della forma quadratica e $\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$.

Mostriamo ora che è possibile capire quando siamo in presenza di quadriche degeneri esaminando la matrice della quadrica. Consideriamo separatamente il caso parabaolico e il caso ellittico o iperbolico.

Il caso parabolico Se P è la trasformazione ortogonale che diagonalizza A

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{b}^T & -k \end{array}\right] \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & -k \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

esaminiamo questi casi:

- se $\tilde{b}_1 = 0$ il determinante è nullo perché la prima riga della matrice è nulla.
- sia invece $\tilde{b}_1 \neq 0$. Esaminiamo separatamente i casi in cui due autovalori sono nulli oppure un solo autovalore è nullo:

  $\tilde{b}_1 \neq 0$ **e due autovalori nulli:** il determinante è nullo perchè moltiplicando la prima riga per $-\tilde{b}_2/\tilde{b}_1$ e sommandola alla seconda si trova una matrice con la seconda riga nulla.

  Dunque, nel caso parabolico con due autovalori nulli la quadrica degenera e $\det B = 0$.

  quando $\lambda_1 = 0$ **e** $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$**:** in questo caso si opera come segue sulla matrice (2.47):

  1. si moltiplica la seconda colonna per $-\tilde{b}_2/\lambda_2$ e si somma alla terza;
  2. si moltiplica la terza colonna per $-\tilde{b}_3/\lambda_3$ e si somma alla terza.

Si trova la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & -k - \frac{\tilde{b}_2}{\lambda_2} - \frac{\tilde{b}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

Essendo ora $\tilde{b}_1 \neq 0$ e $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ il determinante di questa matrice è non nullo.

Ricapitolando, *siamo nel caso parabolico degenere se e solo se valgono ambedue le condizioni* $\det A = 0$ *e* $\det B = 0$.

Il caso ellittico e iperbolico Siamo nel caso ellittico o iperbolico quando il blocco in posizione $(1\,,1)$ della forma a blocchi di B, ossia la matrice A, è invertibile.

Si è visto che quando $\det A \neq 0$ la quadrica è degenere se $k + \mathbf{c}^T A^{-1}\mathbf{b} = 0$. Il verificarsi di questo caso si verifica facilmente esaminando il determinante della matrice B grazie al lemma seguente:

Lemma 144 (DI SCHUR**)** *Sia A una matrice $n \times n$ invertibile e siano $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ vettori di $\mathbb{R}^n$ mentre $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo la matrice a blocchi*

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & -k \end{array}\right]$$

Si ha:

$$\det S = (\det A)\left[k + c^T A^{-1} b\right].$$

Dim. L'asserto segue dal Teorema di Binet e dall'uguaglianza seguente. In questa uguaglianza con $\mathbf{0}$ indichiamo il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & -k \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & A^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0}^T & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{c}^T A^{-1} & k + \mathbf{c}^T A^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]. \quad \blacksquare$$

Quindi *siamo nel caso ellittico o iperbolico degenere quando* $\det A \neq 0$ *e* $\det B = 0$.

Ricapitolando: siamo riusciti a capire se siamo nel caso delle coniche oppure delle quadriche degeneri senza calcolare autovalori e senza ridurre matrici a forma diagonale. Infatti abbiamo provato:

Teorema 145 *Un conica oppure una quadrica è degenere se e solo se la sua matrice B ha determinante nullo.*

2.13 Massimi e minimi di funzioni di due variabili

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili, dotata di derivate parziali continue di primo e secondo ordine. In tal caso si può mostrare che $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ e che vale lo sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)] \\
&+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right\} \\
&+\mathsf{o}\left(x^2+y^2\right) .
\end{aligned}$$

Se il punto (x_0,y_0) è CRITICO, ossia se ivi si annullano ambedue le derivate prime, allora

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = f(x_0,y_0) \\
&+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right\} \\
&+\mathsf{o}\left(x^2+y^2\right) .
\end{aligned}$$

Consideriamo la superficie Σ

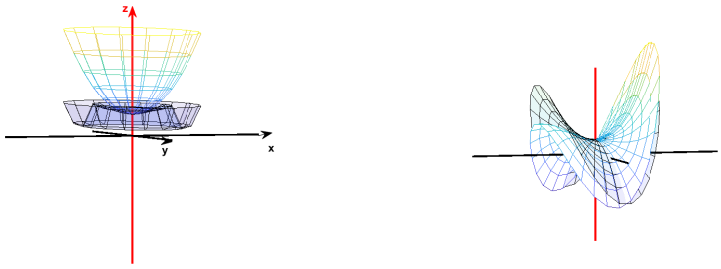
$$\begin{aligned}
&z = f(x_0,y_0) \\
&+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right\} .
\end{aligned}$$

Questa superficie è un paraboloide oppure un cilindro parabolico.

Se la superficie Σ non tocca il piano xy salvo che nell'origine, allora la funzione $f(x,y)$ ha localmente, in un "piccolo" intorno di O, il segno preso dal paraboloide. Dunque, se il paraboloide ha in O un punto di minimo, lo stesso accade per $z = f(x,y)$; se ha un punto di massimo anche $z = f(x,y)$ ha un massimo. Se il paraboloide è a sella, esso taglia il piano x,y in due rette tra le quali assume valori di segno opposto. Lo stesso comportamento ha la funzione, che quindi non ha né un massimo né un minimo. Si dice che la funzione ha un PUNTO DI SELLA. Se invece il paraboloide è degenere in un cilindro, niente può dirsi della superficie.

Si veda la Fig. 2.1.

Figura 2.1: Si conservano, sotto perturbazioni, i punti di minimo (a destra) e di sella (a sinistra) di un paraboloide. Ovviamente anche i punti di massimo si conservano.



Indice analitico

$\delta_{i\,k}$, 132
$\sigma(A)$, 122
75

aggiunta
    trasformazione, 138
alternativa di Fredholm, 150
angolo
    tra due vettori, 28, 30
anomalia (coordinate polari), 43
argomento (coordinate polari), 43
ascissa, 15
asse
    x, 15
    y, 15
    z, 15
    delle ascisse, 15
    delle ordinate, 15
    delle quote, 15
    di rotazione, 80, 156
assi coordinati, 15
autoaggiunta
    trasformazione, 139
autoaggiunto
    endomorfismo, 139
autovalore, 121
autovettore, 121

base, 99
    canonica, 100
    ordinata, 102
    ortonormale, 132, 133
        di un piano, 49
    positiva, 103
bilineare
    funzionale, 128, 129

cambiamento di coordinate, 113
campo scalare, 96
canonica
    base, 100
centro
    dell'iperboloide, 85
    di un ellissoide o iperboloide, 84
cilindro, 76
    verticale, 75
coefficienti di un sistema llineare, 3
colatitudine (coordinate sferiche), 45
colineari
    vettori, 98
combinazione lineare, 48, 50, 97
complementare (sottospazio), 101
complemento algebrico, 117
complessificazione
    di una trasformazione lineare, 123
    di uno spazio lineare, 123
completamento dei quadrati, 161
componente
    (coefficiente della), 19
    di un vettore, 62, 99
        lungo un asse coordinato, 18
coniugato (di un vettore), 123
cono, 77, 78
    asintotico ad un iperboloide, 87
coordinata, 18
coordinate, 15
    cilindriche, 44
    ellittiche, 45
    polari, 43
        anomalia, 43

argomento, 43
modulo, 43
polo, 44
sferiche, 45
colatitudine, 45
longitudine, 45
modulo, 45
coppia positiva, 36
coseni direttori, 32
della retta nel piano, 61
della retta nello spazio, 45
curva
in forma parametrica, 69
intersezione di superfici, 71
piana, 70
in forma cartesiana, 71

decomposizione di vettori, 62
derivata parziale, 72
determinante di una matrice
2×2, 4
3×3, 7
$n \times n$, 9
diagonale principale, 10
dimensione, 99
dipendenza lineare, 98
direttrice
di un cilindro, 76
di un cono, 77
direzione, 22
di una retta, 47, 51
distanza
di rette sghembe, 66
di un punto da un piano, 64
di un punto da una retta, 63
disuguaglianza
di Schwarz, 29, 130
triangolare, 29, 130

elementi
di una matrice, 4, 5, 8
elica, 70
ellisse
di gola, 87
immaginaria, 167
ellissoide, 83, 84
immaginario, 83
endomorfismo, 120
autoaggiunto, 139
ortogonale, 139
semplice, 127
unitario, 139
equazione
canonica
del piano, 53
della retta, 61
cartesiana
del piano, 49, 51
della circonferenza, 26
parametrica
del piano, 47, 51
della circonferenza, 26
della retta, 46, 51
della sfera, 26
segmentaria
del piano, 53
della retta, 61
estremo di un vettore
primo, 19
secondo, 19
euclideo (spazio), 129

fascio
di piani
paralleli, 55
per una retta, 55
di rette
parallele, 61
per una punto, 61
forma, 161
canonica (di coniche e quadriche), 160
lineare, 161
quadratica, 161
ellittica, 163
iperbolica, 163

parabolica, 161, 163
formule
cambiamento di coordinate
ellittiche, 45
polari, 44
sferiche, 45
funzionale, 107, 128
antilineare, 129
bilineare, 128, 129
lineare, 129
nullo, 128
sesquilineare, 128
funzione
omogenea, 77

Gauss (metodo di riduzione), 146
generatori (di un sottospazio), 98
generatrice
di un cilindro, 76
di un cono, 77

identità, 120
del parallelogramma, 29, 130
incognita, 144
indipendenza lineare, 98
inversa (trasformazione), 106
iperboloide, 83
a due falde, 86
ad una falda, 88
iperpiano, 107
isometria, 151
isometrica
trasformazione, 151

Kronecker (simbolo), 132

lemma di Schur, 170
lineare
dipendenza, 98
indipendenza, 98
longitudine
(coordinate sferiche), 45

matrice
2×3, 4
3×3, 6
$n \times m$, 8
diagonalizzabile, 127
semplice, 127
aggiunta, 12
antisimmetrica, 13
autoaggiunta, 13
dei coefficienti, 144
del cambiamento di base, 113
di passaggio, 113
di una conica, 167
di una quadrica, 169
identità, 11
inversa, 11
nulla, 10
ortogonale, 13
speciale, 39, 151
quadrata, 8, 9
simmetrica, 13
trasposta, 12
triangolare, 14, 147
meridiano, 80
metodo di riduzione di Gauss, 146
minore (di una matrice), 145
modulo
coordinate sferiche, 45
coordinate polari, 43
coordinate sferiche, 45
di un vettore, 25
moltiplicazione (per scalari), 17

norma, 24, 129
normale (ad una superficie parametrica), 74
normalizzato (vettore), 131
normalizzazione (di un vettore), 131
nucleo, 104

opposto (di un vettore), 96
ordinata, 15
orientazione, 36
di $\mathbb{R}^n$, 103

origine, 15
ortogonale
  endomorfismo, 139

paraboloide
  a sella, 90, 93
  ellittico, 90, 91
  in forma canonica, 90
  iperbolico, 90, 92
paralleli, 80
piano
  xy, xz, yz, 15
  coordinato, 15
  parallelo ad un vettore, 59
  tangente
    a una superficie, 74
    ad una sfera, 69
polinomio caratteristico, 121
polo
  coordinate polari, 44
positiva
  coppia, 36
  terna, 36
prodotto
  di una matrice per un numero, 8
  interno, 129
  misto, 35
  per scalari, 96
  righe per colonne, 9
  scalare, 27, 129
  vettoriale, 33
proiezione, 15, 44, 102
  obliqua sugli assi coordinati, 18
  ortogonale, 33, 135
    su un piano, 63
    su una retta, 62
    su una retta generica, 63
    sugli assi coordinati, 18
proprietà spettrali, 122
punto
  critico, 171
  di sella, 171
  regolare
    di una curva cartesiana, 73
    di una curva parametrica, 72
    di una superficie cartesiana, 75
  singolare
    di una curva cartesiana, 73
    di una curva parametrica, 72
    di una superficie cartesiana, 75

quadriche
  in forma canonica, 83
quota, 15

rango, 145
regola
  dei segni di Cartesio, 163
  di Ampère, 36
  di Sarrus, 14
  di traslazione degli assi, 23
retta
  tangente a una curva, 71
rette
  sghembe, 57
riferimento
  cartesiano, 15
  cartesiano ortogonale, 16
rotazione, 151
  di coordinate, 38

scalare, 96
  campo, 96
schiera di rette, 90, 94
segmento, 46
sesquilineare (funzionale), 128
sezioni coniche, 82
simbolo di Kronecker, 132
simmetria, 39, 151
sistema
  lineare omogeneo, 3, 6
  lineare, 144
  lineare affine, 4
  omogeneo, 144
somma
  componente per componente, 17

di matrici, 9
di vettori, 96
diretta, 137
sottospazio, 46, 50, 97
banale, 97
complementare, 101
di $\mathbb{R}^3$, 48
nullo, 97
proprio, 97
spazio
euclideo, 129
lineare, 96
vettoriale, 96
spettro, 122
stella di piani, 52
superficie
in forma cartesiana, 69
in forma parametrica, 69
rigata, 78

Teorema
delle proiezioni, 135
di Binet, 11
di Kronecker, 145
di Pitagora, 29, 131
di Rouche–Capelli, 145
fondamentale dell'algebra, 125
termine noto, 144
terna
positiva, 36
traccia (di una matrice), 122
trasformazione
aggiunta, 138
autoaggiunta, 139
inversa, 106
isometrica, 151
lineare, 103
complesificata, 123
traslazione
degli assi coordinati, 23
di un vettore, 19

unità di misura, 15
unitario
endomorfismo, 139

verso, 22
su una retta, 47, 51
versore, 25, 131
di asse coordinato, 18
vertice
di un cono, 77
di un paraboloide, 91
vettore, 18, 96
applicato, 19
rappresentazione, 20
libero, 18
normalizzato, 25, 131
nullo, 96
opposto, 96
rappresentato da un segmento, 19
reale (di $\mathbb{C}^n$), 123
vettori
colineari, 34, 98
ortogonali, 28, 30, 131